

OPTIMIZACIÓN EN LAS DECISIONES DE FINANCIAMIENTO DE PROYECTOS¹

FELIPE TOMÁS MUÑOZ VALDÉS²
MILTON RAMÍREZ MONÁRDEZ³

Universidad del Bío-Bío, Concepción, Chile

RESUMEN

La finalidad de este trabajo es aplicar herramientas de optimización a las decisiones de financiamiento de proyectos de inversión, más específicamente, cómo mejorar el valor actual de un proyecto eligiendo la combinación óptima de fuentes de financiamiento.

El carácter de largo plazo de las inversiones de un proyecto exige investigar las opciones de financiamiento para el proyecto, y no cabe duda que mientras más convenientes sean las condiciones que se logren, más atractivo será el proyecto. La búsqueda de la forma de financiar un proyecto de inversión, puede dar como resultado una variedad bastante importante de opciones diferentes. Esta información es de mucha utilidad para el inversionista, porque le permite determinar cómo financiar el proyecto, es decir, cuánto capital propio debe invertir en el proyecto y cómo debe financiar el monto restante de la inversión.

Los métodos y modelos que se usan actualmente en esta toma de decisiones tienen deficiencias. Una de las deficiencias más importantes de estos métodos es que suponen que en todos los periodos se tienen utilidades antes de impuestos, calculando impuestos sobre las pérdidas antes de impuesto. También presentan dificultades cuando se tienen muchas alternativas de financiamiento y no permiten buscar combinaciones entre fuentes de financiamiento. A medida que aumenta la cantidad y características de las fuentes de financiamiento, aumenta la cantidad de cálculos de valor actual que se deben realizar, por lo que la aplicación de estas herramientas requiere una gran cantidad de tiempo.

Para resolver el problema se recurrió a la teoría económica de Preparación de Proyectos, Evaluación de Proyectos y Programación Matemática, más específicamente a la Programación Mixta, que es una mezcla de Programación Lineal y Programación Entera.

El procedimiento que se empleó para desarrollar el modelo de programación matemática, comenzó con la identificación de las variables y restricciones que influyen en un proyecto y sus fuentes de financiamiento. Luego se determinaron las relaciones lógicas entre variables, para construir la función objetivo y las restricciones.

En el estudio se formuló un modelo de programación matemática aplicable en forma general a proyectos de inversión, que permite tomar las decisiones de cómo financiar proyectos, determinando la combinación óptima de fuentes de financiamiento y sus montos.

¹Este trabajo surge como tema de Proyecto de Título desarrollado por el autor Felipe Muñoz Valdés, "Optimización en las Decisiones de Financiamiento de Proyectos".

²Ingeniero Civil Industrial, Universidad del Bío-Bío, Chile.

fono: (56-41) 95138519

e-mail: felmunoz@alumnos.ubiobio.cl

³Profesor Guía del Proyecto de Título.

Departamento de Ingeniería Industrial, Facultad de Ingeniería, Universidad del Bío-Bío, Chile.

e-mail: miramire@ubiobio.cl

En el modelo se consideraron tres alternativas de financiamiento: capital propio, préstamos a largo plazo y leasing. El modelo puede extenderse más allá de la consideración de esas alternativas, considerando emisión de bonos y acciones.

El modelo creado supera las desventajas de los métodos que se usan actualmente en esta toma de decisiones, pero por su extensión resulta de difícil aplicación. Sin embargo es posible mejorar su tiempo de aplicación si se cuenta con herramientas computacionales que faciliten su creación. Esas herramientas pueden ser interfaces que generen el modelo en lenguajes de software que resuelvan problemas de programación matemática.

1. INTRODUCCIÓN

Cuando se incluye el efecto del financiamiento en la evaluación de un proyecto se deja de medir la rentabilidad del proyecto y se determina la rentabilidad de los recursos propios invertidos en el proyecto, la cual puede ser sustancialmente distinta a la del proyecto.

La búsqueda de la forma de financiar un proyecto de inversión, puede dar como resultado una variedad muy importante de opciones diferentes, como préstamo, leasing, capital propio, etc. El evaluador de proyectos debe enfrentar dicha búsqueda de la mejor alternativa o combinación de alternativas de financiamiento para el proyecto que está evaluando, identificando las posibilidades de financiamiento, su costo y el resto de las condiciones.

El objetivo de este trabajo es aplicar herramientas de optimización a la toma de decisiones de cómo financiar proyectos de inversión, ya que al usar los métodos que existen actualmente se pueden tomar decisiones que no maximizan el resultado del proyecto, entregando menores ganancias o mayores pérdidas al inversionista.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

La metodología que se utilizó en el desarrollo de este modelo de programación matemática, se inició con la recopilación y análisis de la información teórica sobre la preparación, evaluación y financiamiento de proyectos de inversión. De esa revisión, se pudo determinar qué variables y restricciones influyen en el problema.

Como una etapa inicial al diseño del modelo, fue necesario realizar una búsqueda de posibles causas o razones del porqué no se había creado algún modelo de programación matemática que permitiera tomar estas decisiones. Entre las razones encontradas se puede mencionar que los métodos que se usan actualmente entregan buenas soluciones y en un tiempo relativamente económico. También puede influir el desconocimiento de la programación matemática y sus ventajas. Otra razón puede ser que, al momento de buscar alternativas de financiamiento, no se generen muchas, por lo que sería más apropiado evaluar directamente las alternativas. El objetivo principal de esta búsqueda fue determinar qué factores ayudan a la aplicabilidad del modelo. Entre estos se puede destacar:

- La creación de un modelo que entregue la solución óptima.
- El tipo de programación matemática elegido debe ser ampliamente conocido y aplicado.
- El modelo debe ser fácil de aplicar y fácil de entender.

2.1. Planteamiento del problema

El problema que pretende resolver el modelo consiste en la búsqueda de la combinación óptima de fuentes de financiamiento para un proyecto, con el objetivo de maximizar la riqueza del inversionista, lo que equivale a maximizar el valor actual del proyecto (VAN). Las fuentes de financiamiento incluidas en esta toma de decisiones son: capital propio, préstamos a largo plazo y leasing.

El modelo deberá apoyar la toma de decisiones de cómo financiar un proyecto, superando las desventajas de los modelos que existen actualmente.

2.2. Elección del tipo de programación matemática

Del análisis de las partes que influyen en el modelo: flujos de caja, restricciones de cota inferior, restricciones de cota superior, estructura del VAN, se pudo determinar que su estructura es lineal y no hay multiplicación de variables de decisión, por lo que el modelo se creó sobre la base de una función objetivo lineal y restricciones lineales.

La programación lineal (PL), que trata exclusivamente con funciones objetivos y restricciones lineales, es una parte de la programación matemática, y una de las áreas más importantes de la matemática aplicada. Además tiene muchas ventajas; por mencionar algunas: es ampliamente conocida en las distintas áreas de ingeniería, existe una abundante bibliografía sobre el tema y numerosos software para resolver estos problemas.

En el modelo fue necesario incorporar variables de decisión de tipo lógico, es decir, variables que requieren respuestas de "sí" o "no". Al incluir esas variables la programación lineal (PL) se transforma en una programación lineal mixta, la cual considera variables continuas y variables binarias (variables lógicas).

2.3. Diseño del modelo

El modelo se desarrolló sobre la base de la estructura general de un flujo de caja. Esa estructura fue adaptada para separar los efectos del financiamiento de proyectos con préstamos, leasing y capital propio. La estructura de flujo de caja usada en el modelo se muestra en la Tabla N°1.

Tabla N°1: Estructura del flujo de caja.

+ Ingresos afectos a impuestos
+ Ingresos por venta de activos arrendables
- Egresos afectos a impuestos
- Egresos de leasing
- Intereses del préstamo
- Gastos no desembolsables
- Depreciación activos arrendables
- Valor libro activos arrendables
= Utilidad antes de impuesto
- Impuesto
= Utilidad después de impuesto
+ Ajustes por gastos no desembolsables
+ Depreciación activos arrendables
+ Valor libro activos arrendables
- Amortización de la deuda
- Inversión
+ Préstamo
+ Valor leasing
+ Beneficios no afectos a impuestos
= Flujo de caja

Se entenderá por activo arrendable a un activo que se puede financiar con leasing, sin embargo la decisión de arrendar el activo, será tomada después de evaluar su impacto en el proyecto según el modelo. Los parámetros ingreso por venta de activos arrendables, depreciación de activos arrendables y valor libro de activos arrendables, tomarán valores distintos de cero si el activo en cuestión es comprado y no arrendado, en cambio el parámetro egresos de leasing tomará valor distinto de cero si es arrendado. Esto se logrará usando variables binarias que tomarán valor cero si la alternativa de leasing no es considerada y valor uno si es considerada dentro de la solución óptima.

La descripción de los elementos del flujo de caja se muestra a continuación:

- Ingresos afectos a impuesto: son todos aquellos ingresos que aumentan la utilidad contable de la empresa, no considerando los ingresos de la venta de activos arrendables.
- Ingreso por venta de activos arrendables: es el resultado de la suma del ingreso por venta de todos los activos arrendables que fueron comprados y no arrendados.
- Egresos afectos a impuesto: son todos los egresos que disminuyen la utilidad contable de la empresa. No considera las cuotas de leasing de los activos arrendados.
- Egresos de leasing: es el resultado de la suma de todas las cuotas de leasing, de activos que fueron arrendados.
- Interés de préstamos: es el resultado de la suma de los gastos financieros de los préstamos.
- Gastos no desembolsables: son los gastos que para fines de tributación son deducibles, pero no ocasionan salidas de caja, como la depreciación de activos comprados, la amortización de activos intangibles o el valor libro de activos que se venden. No considera los valores libro de activos arrendables.
- Depreciación de activos arrendables: es el resultado de la suma de las depreciaciones de activos arrendables que fueron comprados.
- Valor libro de activos arrendables: es el resultado de la suma de los valores libro de activos arrendables que fueron comprados y se venden después de su uso.
- Impuesto: es el monto de impuestos pagados, el cual será un porcentaje de las utilidades antes de impuesto, o tomará valor cero si se tienen pérdidas antes de impuesto.
- Ajustes por gastos no desembolsables: es el monto de los gastos no desembolsables que se suma por no ser una salida de caja.
- Amortización de la deuda: es el resultado de la suma de las amortizaciones de los préstamos.
- Inversión: es el monto de la inversión requerida para la realización del proyecto.
- Préstamo: es el monto de deuda que se usa para financiar parte de la inversión.
- Valor leasing: es el monto de activos que se arriendan para financiar parte de la inversión.
- Beneficios no afectos a impuesto: son el valor de desecho del proyecto y la recuperación del capital de trabajo.

Cada alternativa de préstamo y leasing, tendrá asignada una variable binaria (variable 0 o 1), que tomará valor "0" si la alternativa no es aceptada y valor "1" si es aceptada. Con esto se logra la perfecta inclusión de los valores relacionados con estas alternativas en los flujos de caja.

El modelo se basará en la enumeración exhaustiva de alternativas, por lo que fue necesario crear un mecanismo que permitiera determinar alternativas mutuamente excluyente. Se entenderá por grupo excluyente a un grupo de alternativas de préstamo mutuamente excluyentes, de las cuales sólo se puede escoger como máximo una alternativa. Aquí se pueden agrupar alternativas que proceden de la misma institución, o se pueden especificar distintos plazos o formas de pago para la misma alternativa. Para las alternativas de leasing el grupo excluyente quedará totalmente definido para cada activo que tenga alternativas de leasing, con lo cual se logrará que para cada activo arrendable se pueda tomar como máximo una alternativa.

Al tomar una alternativa de leasing, la cuota pagada es completamente deducible de impuesto, pero no se puede depreciar el activo, por lo que los beneficios impositivos se tienden a anular. Más aún cuando al comprar un activo, éste se puede vender después de su uso.

Al tomar una alternativa de deuda, el pago de interés es deducible de impuesto, pero la amortización de la deuda no. Al comprar un activo, con préstamo o capital propio, éste se puede depreciar y vender después de su uso.

También se deberá incluir en las inversiones los gastos adicionales de tomar una alternativa de endeudamiento, como son: gastos por emisión de deuda, gastos legales en que incurra la institución prestamista, honorarios de compromiso, etc. Lo mismo se debe aplicar a las alternativas de leasing.

La función objetivo será maximizar el valor actual neto (VAN) del proyecto para el inversionista.

El modelo tendrá los siguientes tipos de variables:

- Variables continuas no negativas: variables que pueden tomar valor reales no negativos.
- Variables no restringidas en signo: variables que pueden tomar valores reales positivos o negativos.
- Variables binarias: variables que pueden tomar valores "0" o "1".

Las restricciones del modelo se pueden agrupar en:

- Restricciones de capital propio disponible.
- Restricciones de deuda permisible.
- Restricciones de leasing permisible.
- Restricciones de inversión y financiamiento.
- Restricciones de flujo de caja.
- Restricciones de impuesto.
- Restricciones de relación de los préstamos y los pagos.
- Restricciones de grupo excluyente para endeudamientos.
- Restricciones de grupo excluyente para activos arrendables.
- Restricciones de igualdad para suma de variables, que influyen en el flujo de caja.
- Restricciones de cota superior e inferior para variables.

3. RESULTADOS

A continuación se muestra cada una de las partes del modelo: datos de entrada, variables y restricciones.

Datos de entrada del proyecto

- ING_t : Ingreso del periodo t. Considera todos los ingresos afectos a impuesto, excepto los valores de venta de activos que tienen alternativas de leasing.
- EGR_t : Egreso del periodo t. Considera todos los egresos afectos a impuesto, excepto los egresos adicionales producto de financiar los activos con o sin leasing.
- GND_t : Gastos no desembolsables del periodo t. Considera sólo a los activos para los que no se tienen alternativas de leasing.
- $BNAI_t$: Beneficios no afectos a impuesto en el periodo t.
- n: Duración del proyecto.
- T: Tasa de impuesto.
- k_i : Periodo de inversión. Donde $i=1, \dots, p$.
- p: Cantidad de periodos de inversión.
- II_{k_i} : Inversión requerida para el periodo de inversión k_i .

Datos de entrada del inversionista

- r: Tasa de descuento del inversionista.
- $KpDISP_{k_i}$: Capital propio disponible para el periodo de inversión k_i .
- $DPERM_{k_i}$: Máxima deuda permisible para el inversionista en el periodo de inversión k_i .
- $LPERM_{k_i}$: Máximo valor de activos que se puede financiar con leasing en el periodo de inversión k_i .

Datos de entrada del endeudamiento

- $d_{ki jm}$: variable binaria que indica la alternativa de financiamiento m del grupo excluyente j, que es utilizada para financiar la inversión del periodo k_i .

$$d_{ki jm} = 1, \text{ si la alternativa } d_{ki jm} \text{ es aceptada.}$$

$$d_{ki jm} = 0, \text{ si la alternativa } d_{ki jm} \text{ no es aceptada.}$$

Grupo excluyente: es un grupo de alternativas de endeudamiento mutuamente excluyentes, de las cuales sólo se puede escoger una. En él se pueden agrupar alternativas que proceden de la misma institución, o se pueden especificar distintos plazos o formas de pago para la misma alternativa.

- $Dmin_{ki jm}$: Monto mínimo de préstamo al que se puede acceder para la alternativa $d_{ki jm}$.
- $Dmax_{ki jm}$: Monto máximo de préstamo al que se puede acceder para la alternativa $d_{ki jm}$.
- $i_{ki jm}$: Tasa de interés de la alternativa $d_{ki jm}$.
- $S_{ki jm}$: Duración (plazo) de la alternativa $d_{ki jm}$.
- J_{ki} : Cantidad de grupos excluyentes para el periodo de inversión k_i .
- $M_{j ki}$: Cantidad de alternativas de financiamiento para el grupo de excluyente j.
- $GADD_{ki jm}$: Gasto adicional por pedir o emitir deuda en el periodo de inversión k_i , para la alternativa m del grupo excluyente j.

Datos de entrada del leasing

Los datos de los activos que tienen alternativas de leasing se incluirán en forma separada de los que no tienen. Los datos serán: depreciación, valor del activo, valor de venta, valor libro, periodo de venta y egresos adicionales producto de no arrendar el activo.

- $L_{ki xy}$: variable binaria que indica la alternativa "y" de leasing para el activo "x", que se debe financiar en periodo de inversión k_i .

$$L_{ki xy} = 1, \text{ si la alternativa } L_{ki xy} \text{ es aceptada.}$$

$$L_{ki xy} = 0, \text{ si la alternativa } L_{ki xy} \text{ no es aceptada.}$$

- X: Número asignado al activo que se financiará con leasing, seriado y reiniciado para cada k_i .
- $DEP_{ki x t}$: Depreciación asociada al activo x en el periodo t, en el cual se debe invertir en el periodo de inversión k_i .
- $EADNL_{ki x t}$: Egresos adicionales para el periodo t producto de financiar el activo x en el periodo de inversión k_i sin usar las alternativas de leasing.
- $V_{ki x}$: Valor del activo x en el monto de la inversión de periodo k_i .
- $TOTX_{ki}$: Cantidad de activos que tienen alternativas de leasing en el periodo k_i .
- Y: Número asignado a la alternativa de leasing, seriado y reiniciado según k_i y x.
- $Y_{ki x}$: Cantidad de alternativas de arrendamiento para el activo x en el periodo de inversión k_i .
- $EADL_{ki xy t}$: Valor de los egresos adicionales del periodo "t" producto de elegir la alternativa de leasing "y" para el activo "x" en el periodo de inversión k_i .

Variables

- FCN_t : Flujo de caja del periodo t.
- IMP_t : Impuesto del periodo t.
- Kp_{ki} : Capital propio usado para la realización del proyecto en el periodo de inversión k_i .
- $D_{ki jm}$: Monto del préstamo a pedir usando la alternativa de endeudamiento $d_{ki jm}$.
- $Dp_{ki jmt}$: Deuda pendiente en el periodo t del préstamo pedido usando la alternativa de endeudamiento $d_{ki jm}$.
- $AMORT_{ki jmt}$: Cuota de amortización pagada en el periodo t del préstamo pedido usando la alternativa de endeudamiento $d_{ki jm}$.
- $INT_{ki jmt}$: Interés pagado en el periodo t del préstamo pedido usando la alternativa de endeudamiento $d_{ki jm}$.
- $C_{ki jmt}$: Cuota pagada en el periodo t del préstamo pedido usando la alternativa de endeudamiento $d_{ki jm}$.
- $g_{ki jm}$: Monto del incremento o decremento en el pago cuando se usa el método aritmético en el pago de

- préstamo usando la alternativa de endeudamiento $d_{ki jm}$.
- $AMORT_t$: Amortizaciones de deudas pagadas en el periodo t .
 - INT_t : Intereses de deudas pagadas en el periodo t .
 - $L_{ki x}$: Variable binaria que indica si el activo x se financió usando una alternativa de leasing en el periodo de inversión ki . Tomado valor 1 si el activo x es arrendado, y valor 0 en otro caso.
 - $INGAD_{ki x t}$: Ingreso adicional producto de la venta de activo x en el periodo t , si es comprado en el periodo de inversión ki .
 - $INGAD_t$: Ingreso adicional total del periodo t , producto de la venta de activos que tenían alternativas de leasing y fueron comprados.
 - $EADL_t$: Egreso adicional total del periodo t producto de financiar algunos activos con leasing.
 - $VLIB_{ki x t}$: Valor libro del activo x del periodo de inversión ki en el periodo t , si es comprado y no arrendado.
 - $VLIB_t$: Valor libro total de los activos que se venden en el periodo t , que tenían alternativas de leasing y fueron comprados.
 - $EADNL_t$: Egreso adicional total del periodo t producto de comprar algunos activos que tenían alternativas de leasing.

Función objetivo

$$\text{Maximizar VAN} = \sum_{t=1}^n \frac{FCN_t}{(1+r)^t} - Kp_0$$

La función objetivo consiste en maximizar el valor actual neto del proyecto.

Restricciones de capital propio

$$\begin{aligned} Kp_{ki} &\leq KpDISP_{ki} & (i = 1, \dots, p) \\ Kp_{ki} &\geq 0 \end{aligned}$$

El capital propio usado en el periodo de inversión ki , no debe exceder al monto de capital disponible del inversionista en cada uno de esos periodos.

Restricciones de deuda permisible

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{Jki} \sum_{m=1}^{Mjki} Dp_{ki jmt} \leq DPERM_{ki} \quad (i = 1, \dots, p; \forall t = ki)$$

La deuda a contraer en el periodo de inversión ki y las deudas pendientes hasta ese periodo, no deben superar el máximo endeudamiento permisible para la empresa o inversionista en ese periodo.

Restricciones de arrendamiento permisible

$$\sum_{X=1}^{TOTX_{ki}} V_{ki x} \times L_{ki x} \leq LPERM_{ki} \quad (i = 1, \dots, p)$$

El monto total de activos arrendados no debe superar la cota máxima exigida por el inversionista, para el periodo de inversión ki .

Restricciones de Inversiones

$$I_{ki} + \sum_{X=1}^{TOTX_{ki}} \sum_{Y=1}^{Y_{kix}} EADL_{ki xy t} \times L_{ki xy} + \sum_{j=1}^{Jki} \sum_{m=1}^{Mjki} d_{ki jm} \times GADD_{ki jm} = Kp_{ki} + \sum_{j=1}^{Jki} \sum_{m=1}^{Mjki} D_{ki jm} + \sum_{X=1}^{TOTX_{ki}} V_{kix} \times L_{kix}$$

(i = 1, ..., p; \forall t = ki)

La inversión requerida en cada periodo de inversión se financia con una mezcla de capital propio, préstamo y leasing. Los gastos adicionales por tomar una alternativa de deuda y los gastos adicionales por tomar una alternativa de leasing, aumentan los requerimientos de deuda y capital propio.

Restricciones de flujos de caja

$$FCN_t = ING_t + INGAD_t - EGR_t - EADL_t - EADNL_t - INT_t - IMP_t - AMORT_t + BNAI_t - Kp_t$$

(t = 1, ..., n)

$Kp_t = Kp_{ki}$ (i = 1, ..., p; \forall t = ki)
 $Kp_t = 0$ (\forall t \neq ki)
 FCN_t : no restringido en signo.

El flujo de caja se calcula usando la estructura predefinida. Aquí se incluyen las consecuencias de financiar o no financiar un activo con alguna de sus alternativas de leasing. Se agrega el ingreso por venta de activos que no se financian con leasing, los egresos adicionales por financiar un activo con leasing y los egresos adicionales de no financiar un activo con leasing. Los flujos de caja pueden ser positivos o negativos.

Restricciones de impuestos

$$IMP_t \geq T \times (ING_t + INGAD_t - EGR_t - EADL_t - EADNL_t - GND_t - DEPAD_t - VLIB_t - INT_t)$$

(t = 1, ..., n)

$IMP_t \geq 0$

El impuesto pagado en el periodo t es una variable que afecta negativamente a la función objetivo, por lo tanto tenderá a tomar el menor valor cumpliendo con las dos restricciones anteriores. Aquí se agregan los efectos de financiar o no financiar un activo con alguna de sus alternativas de leasing. Se agrega la depreciación, el ingreso por venta y el valor libro de activos que no se financian con alguna de sus alternativas de leasing. Los egresos adicionales por financiar un activo con leasing y los egresos adicionales de no financiar un activo con leasing.

Restricciones de grupo excluyente para activos arrendables

$$L_{ki x} = \sum_{Y=1}^{Y_{kix}} L_{ki xy} \quad (\forall ki, x)$$

$L_{ki xy} : (0, 1)$
 $L_{ki x} : (0, 1)$

De las alternativas de leasing que tiene un activo, para cada periodo de inversión, se elegirá como máximo una.

Restricciones de egresos por uso de leasing para activos arrendables

$$EADL_t = \sum_{X=1}^{TOTX_{ki}} \sum_{Y=1}^{Y_{kix}} EADL_{ki xy t} \times L_{ki xy} \quad (t = 1, ..., n; \forall ki)$$

$EADL_t \geq 0$

El egreso adicional por uso de leasing para el activo x, es igual a la contribución de la

alternativa tomada, si no se toma ninguna alternativa, tomará el valor cero.

Restricciones de venta de activos arrendables

$$\begin{aligned} \text{INGAD}_{ki\ x\ t} &= \text{VV}_{ki\ x} \times (1 - \text{L}_{ki\ x}) & (t = \text{PV}_{ki\ x}; \forall ki, x) \\ \text{INGAD}_{ki\ x\ t} &= 0 & (t \neq \text{PV}_{ki\ x}; \forall ki, x) \\ \text{INGAD}_t &= \sum_{i=1}^P \sum_{X=1}^{\text{TOTX}_{ki}} \text{INGAD}_{ki\ x\ t} & (t = 1, \dots, n) \\ \text{INGAD}_{ki\ x\ t} &\geq 0 \\ \text{INGAD}_t &\geq 0 \end{aligned}$$

El ingreso adicional producto de la venta de activos que tenían alternativas de leasing pero fueron comprados, es igual al valor de venta ingresado en la Tabla 5.4. Esos valores se agrupan en la variable INGAD_t , para ser incluidas en las restricciones de impuesto y flujo de caja.

Restricciones de valor libro de activos arrendables

$$\begin{aligned} \text{VLIB}_{ki\ x\ t} &= \text{VL}_{ki\ x} \times (1 - \text{L}_{ki\ x}) & (t = \text{PV}_{ki\ x}; \forall ki, x) \\ \text{VLIB}_{ki\ x\ t} &= 0 & (t \neq \text{PV}_{ki\ x}; \forall ki, x) \\ \text{VLIB}_t &= \sum_{i=1}^P \sum_{X=1}^{\text{TOTX}_{ki}} \text{VLIB}_{ki\ x\ t} & (t = 1, \dots, n) \\ \text{VLIB}_{ki\ x\ t} &\geq 0 \\ \text{VLIB}_t &\geq 0 \end{aligned}$$

El valor libro para activos que tenían alternativas de leasing, pero fueron comprados, es igual al valor libro ingresado en la Tabla 5.4. Esos valores se agrupan en la variable VLIB_t , para ser incluidas en las restricciones de impuesto.

Restricciones de egresos por no usar leasing para activos arrendables

$$\begin{aligned} \text{EADNL}_t &= \sum_{X=1}^{\text{TOTX}_{ki}} \text{EADNL}_{ki\ x\ t} \times (1 - \text{L}_{ki\ x}) & (t = 1, \dots, n; \forall ki) \\ \text{EADNL}_t &\geq 0 \end{aligned}$$

Los activos se pueden comprar o arrendar, si son comprados pueden existir egresos adicionales por no usar leasing, por ejemplo pagar seguro. En cambio, si son arrendados, esos valores tomarán valor cero.

Restricciones de depreciación por no usar leasing para activos arrendables

$$\begin{aligned} \text{DEPAD}_t &= \sum_{X=1}^{\text{TOTX}_{ki}} \text{DEP}_{ki\ x\ t} \times (1 - \text{L}_{ki\ x}) & (t = 1, \dots, n; \forall ki) \\ \text{DEPAD}_t &\geq 0 \end{aligned}$$

Los activos se pueden comprar o arrendar; si son comprados, se deben depreciar por lo que hay que añadir el valor de su depreciación a las restricciones de impuesto; en cambio, si son arrendados, esos valores tomarán valor cero.

Restricciones de interés de deudas del periodo t

$$INT_t = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{Jki} \sum_{m=1}^{Mjki} INT_{ki jmt} \quad (t = 1, \dots, n)$$

$$INT_t \geq 0$$

El interés pagado en el periodo t es igual a la suma de los intereses pagados por causa de cada préstamo.

Restricciones de amortizaciones de deudas del periodo t

$$AMORT_t = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{Jki} \sum_{m=1}^{Mjki} AMORT_{ki jmt} \quad (t = 1, \dots, n)$$

$$AMORT_t \geq 0$$

El monto de amortización pagado en el periodo t es igual a la suma de los montos de amortización pagados por causa de cada préstamo.

Restricciones de grupos excluyentes para préstamos

$$\sum_{m=1}^{Mjki} d_{ki jm} \leq 1 \quad (\forall ki, \forall j)$$

$d_{ki jm} \in (0, 1)$

De los grupos excluyentes se puede tomar como máximo una alternativa.

Restricciones de cota de montos de deuda

$$D_{ki jm} \geq d_{ki jm} \times Dmin_{ki jm}$$

$$D_{ki jm} \leq d_{ki jm} \times Dmax_{ki jm}$$

$$D_{ki jm} \geq 0$$

Si la alternativa dki jm es tomada, el préstamo del periodo de la alternativa dkijm debe ser mayor al monto mínimo de la alternativa, y no puede exceder el monto máximo que la institución financiera dispone para la empresa o para el inversionista en ese periodo. Si la alternativa dkijm no es tomada, el endeudamiento tomará valor cero.

La duración de los préstamos no debe exceder la duración del proyecto ($ki+S_{kijm} \leq n$).

► Restricciones si la alternativa d_{ki jm} se paga con cuotas iguales

Cuotas

$$C_{ki jmt} = 0 \quad (t = 0, \dots, ki)$$

$$C_{ki jmt} = D_{ki jm} \times \left(\frac{i_{kijm}}{1 - (1 + i_{kijm})^{-S_{kijm}}} \right) \quad (t = ki+1, \dots, ki+S_{kijm})$$

$$C_{ki jmt} = 0 \quad (t = ki+S_{kijm}+1, \dots, n; \text{ para } ki+S_{kijm} < n)$$

$$C_{ki\ jmt} \geq 0$$

La cuota es función del monto del préstamo, la tasa de interés y el plazo del préstamo. Este pago se prolonga durante la duración del préstamo, pagando todos los periodos la misma cuota.

Amortizaciones

$$\begin{aligned} \text{AMORT}_{ki\ jmt} &= 0 && (t = 0, \dots, ki) \\ \text{AMORT}_{ki\ jmt} &= C_{ki\ jmt} - \text{INT}_{ki\ jmt} && (t = ki+1, \dots, ki+S_{ki\ jm}) \\ \text{AMORT}_{ki\ jmt} &= 0 && (t = ki+S_{ki\ jm}+1, \dots, n; \text{ para } ki+S_{ki\ jm} < n) \\ \text{AMORT}_{ki\ jmt} &\geq 0 \end{aligned}$$

La cuota pagada en el periodo t se divide en pago de interés y amortización de la deuda. Este pago se prolonga durante la duración del préstamo.

Deudas pendientes

$$\begin{aligned} \text{Dp}_{ki\ jmt} &= 0 && (t = 0, \dots, ki-1; \text{ para } ki \neq 0) \\ \text{Dp}_{ki\ jmt} &= \text{Dp}_{ki\ jm(t-1)} - \text{AMORT}_{ki\ jmt} && (t = ki+1, \dots, ki+S_{ki\ jm}) \\ \text{Dp}_{ki\ jmt} &= 0 && (t = ki+S_{ki\ jm}+1, \dots, n; \text{ para } ki+S_{ki\ jm} < n) \\ \text{Dp}_{ki\ jmt} &= \text{D}_{ki\ jm} && (t = ki) \\ \text{Dp}_{ki\ jmt} &\geq 0 \end{aligned}$$

El pago de la cuota de amortización en el periodo t disminuye la deuda pendiente del periodo anterior.

Intereses

$$\begin{aligned} \text{INT}_{ki\ jmt} &= 0 && (t = 0, \dots, ki) \\ \text{INT}_{ki\ jmt} &= i_{ki\ jm} \times \text{Dp}_{ki\ jm(t-1)} && (t = ki+1, \dots, ki+S_{ki\ jm}) \\ \text{INT}_{ki\ jmt} &= 0 && (t = ki+S_{ki\ jm}+1, \dots, n; \text{ para } ki+S_{ki\ jm} < n) \\ \text{INT}_{ki\ jmt} &\geq 0 \end{aligned}$$

El pago de interés del periodo t se calcula multiplicando la tasa de interés por la deuda pendiente del periodo anterior. Este pago se prolonga durante la duración del préstamo.

► Restricciones si la alternativa $d_{ki\ jm}$ se paga con cuotas de amortización constantes

Cuotas

$$\begin{aligned} C_{ki\ jmt} &= 0 && (t = 0, \dots, ki) \\ C_{ki\ jmt} &= \text{AMORT}_{ki\ jmt} + \text{INT}_{ki\ jmt} && (t = ki+1, \dots, ki+S_{ki\ jm}) \\ C_{ki\ jmt} &= 0 && (t = ki+S_{ki\ jm}+1, \dots, n; \text{ para } ki+S_{ki\ jm} < n) \\ C_{ki\ jmt} &\geq 0 \end{aligned}$$

La cuota pagada en el periodo t se divide en pago de interés y amortización de la deuda. Este pago se prolonga durante la duración del préstamo. La cuota es diferente para cada periodo.

Amortizaciones

$$\begin{aligned} \text{AMORT}_{ki\ jmt} &= 0 && (t = 0, \dots, ki) \\ \text{AMORT}_{ki\ jmt} &= \text{D}_{ki\ jm} / S_{ki\ jm} && (t = ki+1, \dots, ki+S_{ki\ jm}) \\ \text{AMORT}_{ki\ jmt} &= 0 && (t = ki+S_{ki\ jm}+1, \dots, n; \text{ para } ki+S_{ki\ jm} < n) \\ \text{AMORT}_{ki\ jmt} &\geq 0 \end{aligned}$$

La cuota de amortización se calcula dividiendo el monto del préstamo por su duración. Este pago se prolonga durante la duración del préstamo.

Deudas pendientes

$$\begin{aligned}
 Dp_{ki\ jmt} &= 0 && (t = 0, \dots, ki-1; \text{ para } ki \neq 0) \\
 Dp_{ki\ jmt} &= Dp_{ki\ jm(t-1)} - AMORT_{ki\ jmt} && (t = ki+1, \dots, ki+S_{ki\ jm}) \\
 Dp_{ki\ jmt} &= 0 && (t = ki+S_{ki\ jm}+1, \dots, n; \text{ para } ki+S_{ki\ jm} < n) \\
 Dp_{ki\ jmt} &= D_{ki\ jm} && (t = ki) \\
 Dp_{ki\ jmt} &\geq 0 &&
 \end{aligned}$$

El pago de la cuota de amortización en el periodo t disminuye la deuda pendiente del periodo anterior.

Intereses

$$\begin{aligned}
 INT_{ki\ jmt} &= 0 && (t = 0, \dots, ki) \\
 INT_{ki\ jmt} &= i_{ki\ jm} \times Dp_{ki\ jm(t-1)} && (t = ki+1, \dots, ki+S_{ki\ jm}) \\
 INT_{ki\ jmt} &= 0 && (t = ki+S_{ki\ jm}+1, \dots, n; \text{ para } ki+S_{ki\ jm} < n) \\
 INT_{ki\ jmt} &\geq 0 &&
 \end{aligned}$$

El pago de interés del periodo t se calcula multiplicando la tasa de interés por la deuda pendiente del periodo anterior. Este pago se prolonga durante la duración del préstamo.

> Restricciones si la alternativa $d_{ki\ jm}$ se paga con cuotas crecientes o decrecientes (Gradiente Aritmético).

Cuotas

$$\begin{aligned}
 C_{ki\ jm} &= \alpha_1 D_{ki\ jm} - \alpha_2 g_{ki\ jm} && (t = 0, \dots, ki) \\
 C_{ki\ jmt} &= 0 && \\
 C_{ki\ jmt} &= C_{ki\ jm} + g_{ki\ jm}(t - ki - 1) && (t = ki+1, \dots, ki+S_{ki\ jm}) \\
 C_{ki\ jmt} &= 0 && (t = ki+S_{ki\ jm}+1, \dots, n; \text{ para } ki+S_{ki\ jm} < n) \\
 C_{ki\ jmt} &\geq 0 && \\
 g_{ki\ jm} &: \text{ no restringido en signo.} &&
 \end{aligned}$$

Donde:

$$\alpha_{kijm1} = \left(\frac{i_{kijm}}{1 - (1 + i_{kijm})^{-S_{kijm}}} \right)$$

$$\alpha_{kijm2} = \left(\frac{1}{i_{kijm}} \right) - \left(\frac{S_{kijm}}{(1 + i_{kijm})^{S_{kijm}} - 1} \right)$$

$g_{ki\ jm}$: variable de decisión que indica el monto del incremento o decremento en el pago. Si $g_{ki\ jm} < 0$ es decremento, si $g_{ki\ jm} > 0$ es incremento, y si $g_{ki\ jm} = 0$ esta forma de pago se convierte en pago con cuotas iguales.

La cuota se incrementa o decrementa cada periodo en un monto igual a $g_{ki\ jm}$. Este pago se prolonga a lo largo del préstamo. La cuota es diferente para cada periodo.

Amortizaciones

$$\begin{aligned}
 \text{AMORT}_{ki\ jmt} &= 0 & (t = 0, \dots, ki) \\
 \text{AMORT}_{ki\ jmt} &= C_{ki\ jmt} - \text{INT}_{ki\ jmt} & (t = ki+1, \dots, ki+S_{ki\ jm}) \\
 \text{AMORT}_{ki\ jmt} &= 0 & (t = ki+S_{ki\ jm}+1, \dots, n; \text{ para } ki+S_{ki\ jm} < n) \\
 \text{AMORT}_{ki\ jmt} &\geq 0
 \end{aligned}$$

La cuota pagada en el periodo t se divide en pago de interés y amortización de la deuda. Este pago se prolonga a lo largo del préstamo.

Deudas pendientes

$$\begin{aligned}
 \text{Dp}_{ki\ jmt} &= 0 & (t = 0, \dots, ki-1; \text{ para } ki \neq 0) \\
 \text{Dp}_{ki\ jmt} &= \text{Dp}_{ki\ jm(t-1)} - \text{AMORT}_{ki\ jmt} & (t = ki+1, \dots, ki+S_{ki\ jm}) \\
 \text{Dp}_{ki\ jmt} &= 0 & (t = ki+S_{ki\ jm}+1, \dots, n; \text{ para } ki+S_{ki\ jm} < n) \\
 \text{Dp}_{ki\ jmt} &= \text{D}_{ki\ jm} & (t = ki) \\
 \text{Dp}_{ki\ jmt} &\geq 0
 \end{aligned}$$

El pago de la cuota de amortización en el periodo t disminuye la deuda pendiente del periodo anterior.

Intereses

$$\begin{aligned}
 \text{INT}_{ki\ jmt} &= 0 & (t = 0, \dots, ki) \\
 \text{INT}_{ki\ jmt} &= i_{ki\ jm} \times \text{Dp}_{ki\ jm(t-1)} & (t = ki+1, \dots, ki+S_{ki\ jm}) \\
 \text{INT}_{ki\ jmt} &= 0 & (t = ki+S_{ki\ jm}+1, \dots, n; \text{ para } ki+S_{ki\ jm} < n) \\
 \text{INT}_{ki\ jmt} &\geq 0
 \end{aligned}$$

El pago de interés del periodo t se calcula multiplicando la tasa de interés por la deuda pendiente del periodo anterior. Este pago se prolonga a lo largo del préstamo.

► Restricciones si la alternativa $d_{ki\ jm}$ se paga usando el método americano

La deuda se cancela por completo en el último periodo del préstamo, pagando intereses a lo largo del préstamo.

Cuotas

$$\begin{aligned}
 C_{ki\ jmt} &= 0 & (t = 0, \dots, ki) \\
 C_{ki\ jmt} &= \text{INT}_{ki\ jmt} + \text{AMORT}_{ki\ jmt} & (t = ki+1, \dots, ki+S_{ki\ jm}) \\
 C_{ki\ jmt} &= 0 & (t = ki+S_{ki\ jm}+1, \dots, n; \text{ para } ki+S_{ki\ jm} < n) \\
 C_{ki\ jmt} &\geq 0
 \end{aligned}$$

La cuota pagada en el periodo t se divide en pago de interés y amortización de la deuda. Este pago se prolonga a lo largo del préstamo. Todos los periodos se paga la misma cantidad de interés, y el valor de la amortización es cero excepto en el periodo en que termina el préstamo.

Amortizaciones

$$\begin{aligned}
 \text{AMORT}_{ki\ jmt} &= 0 & (t = 0, \dots, ki+S_{ki\ jm} - 1) \\
 \text{AMORT}_{ki\ jmt} &= \text{D}_{ki\ jm} & (t = ki+S_{ki\ jm}) \\
 \text{AMORT}_{ki\ jmt} &= 0 & (t = ki+S_{ki\ jm}+1, \dots, n; \text{ para } ki+S_{ki\ jm} < n)
 \end{aligned}$$

$$AMORT_{ki\ jmt} \geq 0$$

El valor de la amortización es cero excepto en el periodo en que termina el préstamo. En el periodo $S_{ki\ jm}$ se paga el monto completo del préstamo.

Deudas pendientes

$$\begin{aligned} Dp_{ki\ jmt} &= 0 && (t = 0, \dots, ki-1; \text{ para } ki \neq 0) \\ Dp_{ki\ jmt} &= D_{ki\ jm} && (t = ki, \dots, ki+S_{ki\ jm}-1) \\ Dp_{ki\ jmt} &= 0 && (t = ki+S_{ki\ jm}, \dots, n) \\ Dp_{ki\ jmt} &\geq 0 \end{aligned}$$

La deuda pendiente permanece constante, hasta que se paga por completo en el periodo $S_{ki\ jm}$.

Intereses

$$\begin{aligned} INT_{ki\ jmt} &= 0 && (t = 0, \dots, ki) \\ INT_{ki\ jmt} &= i_{ki\ jm} \times D_{ki\ jm} && (t = ki+1, \dots, ki+S_{ki\ jm}) \\ INT_{ki\ jmt} &= 0 && (t = ki+S_{ki\ jm}+1, \dots, n; \text{ para } ki+S_{ki\ jm} < n) \\ INT_{ki\ jmt} &\geq 0 \end{aligned}$$

El pago de interés es constante y se calcula multiplicando la tasa de interés por el monto de la deuda. Este pago se prolonga en el transcurso del préstamo.

4. DISCUSIÓN

Ventajas y desventajas del modelo

Entre las ventajas que tiene el modelo se pueden mencionar:

- El modelo permite tomar las decisiones óptimas.
- Considera los flujos de caja como un todo.
- No calcula impuestos sobre perdidas antes de impuesto.
- Permite considerar varias alternativas de financiamiento.
- Permite la búsqueda de combinaciones de fuentes de financiamiento.
- Considera varios periodos de inversión y el impacto de una decisión sobre otra.
- No requiere información adicional en comparación con los modelos que se usan actualmente.

Las desventajas que tiene el modelo son:

- El modelo es muy extenso, lo que hace difícil su aplicación.
- La aplicación del modelo requiere de una gran inversión de tiempo.
- Requiere de un software para resolver problemas de programación mixta, con un buen soporte para variables binarias.

Mejoras para el desempeño y uso del modelo

El modelo funciona y es capaz de dar las respuestas que se necesitan. Sin embargo es necesario aplicar otras herramientas que permitan:

- Facilitar la creación del modelo.
- Disminuir el tiempo de creación del modelo.

Para mejorar los aspectos antes mencionados sería correcto crear una interfaz en la cual ingresar los datos del proyecto y las alternativas de financiamiento, para una generación automática del modelo.

Existen muchas alternativas para crear una interfaz, lo primero es decidir el software a utilizar para la resolución del modelo, y en función de ese software crear la interfaz. Para la creación de interfaz se podría recurrir, entre muchos, a lenguajes de programación como Visual Basic, Visual C++, incluso Excel.

Al tener una herramienta de este tipo, el modelo se generará automáticamente, con lo que facilitará la creación del modelo y disminuirá considerablemente el tiempo de creación del modelo.

5. CONCLUSIONES

- Aunque la evaluación de un proyecto se debe efectuar en forma independiente de las fuentes de financiamiento, no cabe duda de que mientras las decisiones de financiamiento sean óptimas, más atractivo será el resultado del proyecto.
- Los métodos que se usan actualmente en la toma de decisiones de alternativas de financiamiento para proyectos no entregan buenas soluciones.
- El modelo creado permite tomar las decisiones óptimas entre alternativas de leasing, endeudamiento y capital propio, dentro del margen restrictivo que imponga el inversionista, encontrando el valor actual óptimo del proyecto.
- El modelo puede extenderse más allá de la consideración de alternativas de leasing y endeudamiento, considerando emisión de bonos y acciones.
- Para resolver el modelo es necesario usar un software que permita la resolución de modelos de programación mixta que tenga un buen soporte de variables binarias.
- Para la creación del modelo, se requiere de una gran inversión en tiempo. Esto se debe a que el modelo es muy extenso.
- Para mejorar la aplicabilidad del modelo es necesario crear una herramienta computacional automatizada, que sea capaz de tratar la información del proyecto y generar el modelo automáticamente, en el lenguaje de algún software que resuelva problemas de programación mixta.

6. REFERENCIAS

1. F. Muñoz; "Optimización en las decisiones de financiamiento de proyectos"; Universidad del Bío-Bío; Proyecto de título.
2. Nassir Sapag y Reinaldo Sapag CH.; "Preparación y evaluación de proyectos"; Editorial McGraw-Hill; 4ª edición.
3. Nassir Sapag; "Criterios de evaluación de proyectos"; Editorial McGraw-Hill; 1ª edición.
4. Leland Blank y Anthony Tarquin; "Ingeniería económica"; Editorial McGraw-Hill; 4ª edición.
5. Richard Brealey y Stewart Myers; "Fundamentos de financiación empresarial"; Editorial McGraw-Hill; 4ª edición.
6. James Van Horne; "Fundamentos de administración financiera"; Editorial Prentice-Hall; 6ª edición.
7. G.C Philippatos; "Fundamentos de administración financiera (texto y casos)"; Editorial McGraw-Hill; 1ª edición.
8. H.A. Taha; "Investigación de operaciones"; Editorial Prentice-Hall, 6ª edición.

