

# MODELOS DE TAMAÑO DEL LOTE CON DEMANDA PARCIALMENTE SATISFECHA\*

## LOT-SIZE MODELS WITH PARTIAL BACKLOGGING DEMAND

Joaquín Sicilia<sup>1</sup>, Luis A. San José<sup>2</sup>, Juan García-Laguna<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Dpto. de Estadística, Investigación Operativa y Computación, Facultad de Matemáticas. Universidad de La Laguna. Avda. Astrofísico Francisco Sánchez s/n. La Laguna, Tenerife. España.

<sup>2</sup>Dpto. de Matemática Aplicada, Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática. Universidad de Valladolid. C° del Cementerio s/n. Valladolid. España.

<sup>3</sup>Dpto. de Estadística e Investigación Operativa, Facultad de Ciencias. Universidad de Valladolid. C/ Prado de la Magdalena s/n. Valladolid. España.

### RESUMEN

Se estudian modelos EOQ de inventarios, en los que, durante el período de escasez, se considera que una proporción de la demanda se pierde y el resto se atiende con la llegada del siguiente pedido. La fracción de demanda no satisfecha en el período de rotura se supone que es una función dependiente del tiempo que los clientes deberían esperar hasta la recepción del artículo. El objetivo es encontrar el tamaño del lote que maximiza el beneficio por unidad de tiempo. Este beneficio medio se calcula teniendo en cuenta los ingresos obtenidos por las ventas y los costes de compra, mantenimiento, rotura y pedido. El coste unitario de compra es constante y conocido, el coste de almacenamiento es una función lineal basada en el inventario promedio y el coste de realizar un pedido es constante e independiente del tamaño del pedido. Los costes unitarios de rotura son funciones afines que dependen del tiempo que los clientes deben o deberían esperar hasta la llegada del siguiente pedido. Se desarrolla un procedimiento para caracterizar la política óptima de reposición y el beneficio máximo asociado. Este trabajo extiende diversos modelos de inventario estudiados por otros autores.

**Palabras clave:** Teoría de inventarios, modelos EOQ, costes de rotura, demanda parcialmente satisfecha.

### ABSTRACT

We study EOQ inventory models where, during the stockout period, a proportion of the demand is lost and the rest is filled with the next order. We suppose that the fraction of backlogged demand is described by a function which depends on the amount of time a customer waits before receiving the good. The objective consists of determining the lot size which maximizes the profit per unit time. This average profit is calculated by the revenues obtained by the sales and the costs of purchasing, holding, backloging, losing and ordering. The unit purchasing cost is known and constant, the holding cost is a linear function based on average inventory level and the order cost is fixed regardless of the lot size. The unit shortage costs

\*Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el Ministerio de Educación y Ciencia, Proyecto de Investigación MTM2007-60928, del Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo Tecnológico e Innovación.

\*Este trabajo fue presentado en el VIII Congreso Chileno de Investigación Operativa, realizado por la Universidad del Bio-Bio en la ciudad de Chillán en Octubre del año 2009

Autor para correspondencia: jsicilia@ull.es

Recibido: 07.04.2009 Aceptado: 30.10.2009

are affine functions, which depend on the time the customers have to wait until the arrival of the next order. A procedure is presented to characterize the optimal replenishment policy and the associate maximum profit. This work extends several inventory models studied by other authors.

**Keywords:** Inventory systems, EOQ models, shortage cost, partial backlogging.

## INTRODUCCIÓN

Entre las muchas extensiones del modelo de cantidad económica de pedido (EOQ) estudiadas en la literatura sobre Teoría de Inventarios, una de las que con mayor frecuencia se ha considerado es la que tiene lugar cuando en un sistema se permite la rotura del stock. Habitualmente se considera que, cuando se produce esta situación de carencia de existencias, la demanda pendiente se atiende en el momento que llega un nuevo pedido al almacén. Sin embargo, en muchos sistemas reales de inventario, solamente una fracción de la demanda durante el período de rotura se sirve con retraso y el resto de la demanda se pierde. Este comportamiento de los clientes se modela mediante la consideración de demanda parcialmente satisfecha en la formulación del sistema de inventario.

Los primeros trabajos en los que se proporciona la solución a un sistema EOQ, donde la demanda en el período de rotura se cubre parcialmente, son los de Montgomery *et al.* (1973), Rosenberg (1979) y Park (1982, 1983). Estos autores consideran que sólo una proporción fija de la demanda durante el período de escasez se sirve con retraso, mientras que la fracción restante se pierde.

En los últimos años se ha prestado una considerable atención a los sistemas de inventario con una mixtura de demandas atendidas con retraso y pérdida de ventas, donde la fracción de demanda pendiente de satisfacer es una función decreciente del tiempo que transcurre entre el momento en que se solicita el artículo y la llegada del siguiente pedido. Así podemos citar, entre otros, los trabajos de Abad (1996, 2001, 2008), Bhunia *et al.* (2009), Chang *et al.* (2006), Dye (2007), Dye *et al.* (2007), Dye & Ouyang (2005), Pal *et al.* (2006), Papachristos & Skouri (2003), San-José *et al.* (2005a, 2005b, 2006), Skouri & Papachristos (2003), Wang (2002) y Wu *et al.* (2006).

En la mayoría de los trabajos reseñados anteriormente, la paciencia de los clientes se modela mediante una función hiperbólica dependiente del tiempo que los clientes deben esperar hasta la recepción del artículo. Sin embargo, solamente en los trabajos de San-José *et al.* (2005a, 2005b, 2006) se incluye un coste fijo de escasez por unidad satisfecha con retraso (independiente del tiempo). Es obvio que si en la función de beneficios totales no se incluyen todos los costes relevantes, la solución óptima que maximiza el beneficio total tendrá un número, tanto de ventas perdidas como de cantidades suministradas con demora, que no se corresponden con la realidad, lo que implica un coste total que no es representativo.

En este trabajo se estudia un modelo que generaliza diversos sistemas EOQ de inventario con demanda parcialmente acumulable. Un ejemplo ilustrativo de ello puede ser la venta de determinado automóvil en un concesionario. Los clientes se acercan al concesionario a comprar cierto tipo de vehículo y ese modelo que los clientes desean puede no estar disponible en stock. ¿Cuál es el comportamiento de los clientes ante esta situación? Parece lógico admitir que un grupo de ellos no está dispuesto a esperar, mientras que otros esperarán por su automóvil en función del tiempo que tarde el concesionario en suministrarles el vehículo. Así, la proporción de clientes que está dispuesto a esperar disminuirá con el tiempo que estos deben esperar hasta la recepción del vehículo.

En ninguno de los trabajos anteriormente citados se considera que el coste unitario por cada unidad, cuya demanda se pierde, dependa del tiempo que resta hasta la llegada del siguiente pedido. Sin embargo, en la práctica, los clientes toman normalmente la decisión de esperar hasta el siguiente pedido o marcharse, en función del tiempo que ellos tendrían que esperar. Por consiguiente, en el caso de pérdida de ventas, el prestigio comercial depende también del tiempo que transcurre hasta la llegada del siguiente pedido. Además, en general, el coste unitario de escasez para un cliente paciente que esté dispuesto a esperar (demanda acumulable) es diferente del correspondiente a un cliente impaciente que no espera (pérdida de ventas). Este enfoque relativo al coste unitario de pérdida de confianza por unidad perdida aparece reflejado en los trabajos de Chern *et al.* (2005) y San-José *et al.* (2009).

Así, consideraremos que el coste unitario por demanda pendiente de servir y el coste unitario por cada unidad cuya demanda se pierde, dependen del tiempo que resta hasta la llegada del siguiente pedido; es decir, se considera que son cuatro y no tres los parámetros que determinan los costes de escasez. De aquí que, al suponer nulos algunos de tales parámetros, pero no todos, se obtienen diferentes modelos, algunos de los cuales se encuentran en la literatura sobre el tema, pero otros son nuevos modelos de gestión de inventarios.

Como consecuencia, el modelo propuesto constituye un marco general para artículos no perecederos con precio de venta constante que incluye numerosos modelos previos como casos particulares (ver, por ejemplo, Hadley & Whitin, 1963; Montgomery *et al.*, 1973; Rosenberg, 1979; Park, 1982; Abad, 2001; Chu & Chung, 2004; San-José *et al.*, 2005b; Yang, 2007; Leung, 2008; Pentico & Drake, 2009 y San-José *et al.*, 2009). Además, se desarrolla un algoritmo para determinar la política óptima de reposición, la demanda durante el período de escasez y el beneficio máximo asociado.

Este trabajo está estructurado de la siguiente forma: En la Sección 2 se indican las hipótesis y la notación que se utilizará a lo largo del trabajo. A continuación, formulamos el modelo matemático en la Sección 3. El trabajo continúa con la Sección 4, donde presentamos un procedimiento para determinar la política óptima cuando la función que representa la proporción de clientes dispuestos a esperar es del tipo racional. Además, se incluyen algunos ejemplos numéricos para ilustrar el funcionamiento del procedimiento desarrollado. El trabajo finaliza con las conclusiones y con algunos comentarios acerca de los posibles trabajos futuros.

## Hipótesis y Notación

El sistema de inventario que estudiamos en este trabajo admite las siguientes hipótesis.

- El sistema considera un solo producto con demanda independiente.
- El horizonte de planificación es infinito.
- El plazo de reabastecimiento se considera despreciable o nulo.
- El control del inventario se realiza mediante un sistema de revisión continua.
- La tasa de demanda es conocida y constante.
- El coste de realizar un pedido es constante e independiente del tamaño del pedido.
- El coste por unidad comprada y el precio de venta de cada unidad son conocidos y constantes.
- El coste unitario de almacenamiento es una función lineal del tiempo que el artículo permanece en el almacén.

- Se permite la rotura del stock, pero solamente una parte de la demanda en ese periodo se sirve con retraso, mientras que el resto de la demanda se pierde.
- En cada instante del período de rotura, la fracción de demanda pendiente se describe por medio de una función que depende del tiempo que el cliente debe esperar hasta la llegada del siguiente pedido.
- El coste unitario de escasez por demanda pendiente incluye un coste fijo y un coste proporcional al tiempo que transcurre hasta que se recibe el artículo.
- El coste de una venta perdida, sin incluir la pérdida de beneficios, incluye un coste fijo y un coste proporcional al tiempo que falta hasta la llegada del siguiente pedido.

La notación que utilizaremos a lo largo del trabajo es la siguiente:

$D$	tasa de demanda ( $> 0$ ).
$K$	coste de realizar un pedido ( $> 0$ ).
$p$	coste unitario de compra ( $> 0$ ).
$s$	precio unitario de venta ( $s > p$ ).
$h$	coste de almacenamiento por unidad y unidad de tiempo ( $> 0$ ).
$\omega_o$	coste fijo de escasez por unidad pendiente de satisfacer ( $\geq 0$ ).
$\omega$	coste de escasez por unidad pendiente de satisfacer y por unidad de tiempo ( $\geq 0$ ).
$\pi_o$	coste de pérdida de confianza por cada venta perdida, independiente del tiempo, es decir, es el coste fijo debido a una venta perdida sin incluir la pérdida de beneficios ( $\geq 0$ ).
$\pi$	coste de pérdida de confianza por unidad perdida y por unidad de tiempo ( $\geq 0$ ).
$l(t)$	nivel neto de inventario en el tiempo $t$ (existencias menos demanda pendiente de cubrir).
$T$	longitud del ciclo de inventario ( $> 0$ ).
$\Psi$	longitud del intervalo de cada ciclo de inventario en el que el inventario es negativo ( $\geq 0$ ).
$\tau$	tiempo de espera, cuando hay rotura, que transcurre entre la llegada de un cliente y la recepción del siguiente pedido ( $> 0$ ).
$\beta(\tau)$	fracción de demanda pendiente de satisfacer cuando el tiempo de espera es $\tau$ . Suponemos que $\beta(\tau) = \rho/(1+\gamma\tau)$ , para $\tau > 0$ y $\gamma > 0$ .
$\rho$	intensidad de demanda pendiente; es decir, extremo superior de las fracciones de demanda pendiente en cada instante del intervalo de escasez ( $0 \leq \rho \leq 1$ ).
$q$	tamaño del lote ( $\geq 0$ ).
$b$	demanda durante el periodo de rotura ( $\geq 0$ ).
$\xi_o$	parámetro auxiliar, $\xi_o = \rho\omega_o + (1-\rho)(\pi_o + s - p)$ .
$\Delta$	parámetro auxiliar, $\Delta = (\xi_o D)^2 - 2KhD$ .
$\Gamma$	parámetro auxiliar, $\Gamma = \rho[\omega - \pi + \gamma(\pi_o + s - p - \omega_o)]$ .
$\xi$	parámetro auxiliar, $\xi = \rho\omega + (1-\rho)\pi$ .

## El modelo

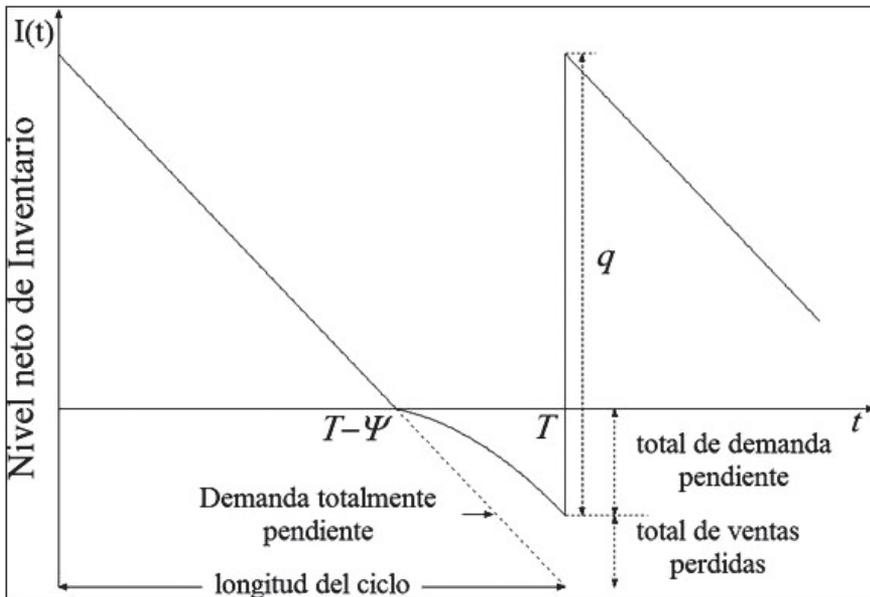
Teniendo en cuenta las hipótesis admitidas en la sección anterior, se sigue que el nivel neto de inventario en el instante  $t$ , es decir  $l(t)$ , es una función periódica de período  $T$  y continua en el intervalo  $(0, T)$ . Como el sistema tiene tasa de demanda constante, cuando el nivel neto de inventario es positivo, su valor decrece linealmente; es decir,  $l(t) = D(T - \Psi - t)$  si  $0 \leq t \leq T - \Psi$ . Por tanto, el nivel máximo de inventario neto es  $D(T - \Psi)$ , que se alcanza en el instante  $t = 0$ ; por otro lado, en el instante  $t = T - \Psi$ , el nivel de inventario es cero. Como hemos supuesto que en situaciones de escasez existen clientes impacientes, se sigue que en cada instante  $t$  del intervalo  $[T - \Psi, T)$  solamente una fracción variable  $\beta(\tau)$ , con  $\tau = T - t$ , de la demanda está

dispuesta a esperar al siguiente pedido.

De todo lo anterior se sigue que el nivel neto de inventario para  $t \in [T-\Psi, T)$  viene dado por

$$I(t) = I(T - \tau) = -D \int_{\tau}^{\Psi} \beta(r) dr = -D \int_{T-t}^{\Psi} \frac{\rho}{1+\gamma r} dr = \frac{D\rho}{\gamma} \ln \left( \frac{1+\gamma(T-t)}{1+\gamma\Psi} \right) \quad (1)$$

La variación del nivel neto de inventario durante un ciclo de longitud  $T$  se recoge en la Figura 1.



**Figura N°1.** Representación gráfica del ciclo de inventario

Además, el nivel mínimo de inventario neto es

$$I_T = \lim_{t \rightarrow T^-} I(t) = -D \int_0^{\Psi} \beta(r) dr = -\frac{D\rho}{\gamma} \ln(1 + \gamma\Psi). \quad (2)$$

y el total de demanda pendiente de satisfacer en un ciclo es  $-I_T$ .

### Obtención de la función objetivo

El tamaño del lote debe cubrir tanto la demanda durante el período con existencias como la demanda que llega en el período de rotura y que está dispuesta a esperar la llegada del siguiente pedido. Así,  $q = D(T-\Psi) - I_T$ .

Los ingresos por ciclo se deben a la venta de las unidades servidas a tiempo, más la venta de las unidades servidas de forma tardía; es decir,  $sq = s[D(T-\Psi) - I_T]$ . De forma análoga, el coste de compra por ciclo es  $\rho[D(T-\Psi) - I_T]$ . El coste de reabastecimiento es  $K$ . El coste de almacenamiento por ciclo

es  $h \int_0^{T-\Psi} I(t) dt = \frac{Dh}{2} (T - \Psi)^2$ . El coste fijo de escasez por demanda pendiente de satisfacer en un ciclo es  $-\omega_o I_T$  y el coste de escasez por demanda pendiente de satisfacer dependiente del tiempo es  $\omega \int_{T-\Psi}^T [-I(t)] dt = D\omega \int_0^{\Psi} \tau \beta(\tau) d\tau = D\omega \rho [\gamma\Psi - \ln(1 + \gamma\Psi)] / \gamma^2$ . Finalmente,

el coste de escasez por pérdida de confianza debida a ventas perdidas durante un ciclo es  $\pi_o(D\Psi + I_T) + D\pi \int_0^\Psi \tau[1 - \beta(\tau)]d\tau = D(\pi_o - \rho\pi/\gamma)\Psi + D\pi\Psi^2/2 + D\rho(\pi - \gamma\pi_o)/\gamma^2 \ln(1 + \gamma\Psi)$ .

Disponemos ahora de todas las cantidades necesarias para calcular el beneficio por ciclo,  $P(T, \Psi)$ . Dicho beneficio se determina restando a los ingresos la suma de los costes de compra, reabastecimiento, almacenamiento, escasez y de pérdida de ventas. En consecuencia,

$$P(T, \Psi) = (s - p)[D(T - \Psi) - I_T] - K - \frac{Dh}{2}(T - \Psi)^2 + \omega_o I_T - D\omega \int_0^\Psi \tau\beta(\tau)d\tau - \pi_o(D\Psi + I_T) - D\pi \int_0^\Psi \tau[1 - \beta(\tau)]d\tau \quad (3)$$

Es decir,  $P(T, \Psi) = (s - p)DT - K - \frac{Dh}{2}(T - \Psi)^2 - E(\Psi)$ , donde

$$E(\Psi) = -\omega_o I_T + D\omega \int_0^\Psi \tau\beta(\tau)d\tau + (\pi_o + s - p)(D\Psi + I_T) + D\pi \int_0^\Psi \tau[1 - \beta(\tau)]d\tau = (\xi_o + \Gamma/\gamma)D\Psi + \pi D\Psi^2/2 - D\Gamma \ln(1 + \gamma\Psi)/\gamma^2. \quad (4)$$

Nótese que  $E(\Psi)$  es el coste total de escasez por ciclo, incluyendo la pérdida de beneficios correspondiente a las unidades no vendidas.

De lo anterior se sigue que el beneficio, o ganancia, por unidad de tiempo,  $G(T, \Psi)$ , es

$$G(T, \Psi) = \frac{P(T, \Psi)}{T} = (s - p)D - C(T, \Psi), \quad (5)$$

donde

$$C(T, \Psi) = \frac{1}{T} \left[ K + \frac{Dh}{2}(T - \Psi)^2 + (\xi_o + \Gamma/\gamma)D\Psi + \pi D\Psi^2/2 - D\Gamma \ln(1 + \gamma\Psi)/\gamma^2 \right]. \quad (6)$$

Por tanto, nuestro problema consiste en determinar las variables de decisión  $T$  y  $\Psi$ , con  $\Psi \geq 0$ ,  $\Psi \leq T$  y  $T > 0$ , que minimizan la función  $C(T, \Psi)$ .

### Solución del problema

Tras unas sencillas manipulaciones algebraicas, la función objetivo dada en (6) también puede expresarse como

$$C(T, \Psi) = \frac{K + Dh\Psi^2/2 + (\xi_o + \Gamma/\gamma)D\Psi + \pi D\Psi^2/2 - D\Gamma \ln(1 + \gamma\Psi)/\gamma^2}{T} + \frac{Dh}{2}T - Dh\Psi. \quad (7)$$

Para un valor fijo de  $\Psi$ , la función  $C(T, \Psi)$  es estrictamente convexa y alcanza su valor mínimo en el punto

$$T^*(\Psi) = \sqrt{\frac{2K + 2D(\xi_o + \Gamma/\gamma)\Psi + D(\pi + h)\Psi^2 - 2D\Gamma \ln(1 + \gamma\Psi)/\gamma^2}{Dh}} > \Psi \quad (8)$$

con valor óptimo

$$C(T^*(\Psi), \Psi) = \sqrt{2KDh + 2D^2h(\xi_o + \Gamma/\gamma)\Psi + D^2h(\pi + h)\Psi^2 - 2D^2h\Gamma \ln(1 + \gamma\Psi)/\gamma^2} - Dh\Psi \quad (9)$$

$$= Dh(T^*(\Psi) - \Psi) \quad (10)$$

Algunas propiedades importantes de la función  $C(T(\Psi), \Psi)$  son las siguientes:

- La función  $C(T(\Psi), \Psi)$  es continua para todo  $\Psi \geq 0$ .
- Existe la derivada de  $C(T(\Psi), \Psi)$  y se verifica

$$\frac{dC(T^*(\Psi), \Psi)}{d\Psi} = Dh \frac{L(\Psi)}{U(\Psi)V(\Psi)}, \quad (11)$$

donde

$$L(\Psi) = D^2 \left( \xi_0 + \frac{\Gamma\Psi}{1+\gamma\Psi} + \pi\Psi \right)^2 + D^2 h \pi \Psi^2 + \frac{2D^2 h}{\gamma^2} \Gamma \left( \ln(1+\gamma\Psi) - \frac{\gamma\Psi}{1+\gamma\Psi} \right) - 2KDh, \quad (12)$$

$$U(\Psi) = \sqrt{2KDh + 2D^2 h (\xi_0 + \Gamma/\gamma)\Psi + D^2 h (\pi + h)\Psi^2 - 2D^2 h \Gamma \ln(1+\gamma\Psi) / \gamma^2},$$

$$V(\Psi) = D[\xi_0 + (\pi + h)\Psi + \Gamma\Psi / (1+\gamma\Psi)] + U(\Psi) \quad (13)$$

– Se tiene

$$\lim_{\Psi \rightarrow \infty} C(T^*(\Psi), \Psi) = \begin{cases} D(\xi_0 + \Gamma/\gamma) & \text{si } \pi = 0 \\ \infty & \text{si } \pi > 0 \end{cases} \quad (14)$$

Como  $U(\Psi) = DhT(\Psi)$ , es claro que  $U(\Psi) > 0$ . Además, de (13) se sigue que también  $V(\Psi) > 0$ . En consecuencia, el mínimo global de la función  $C(T(\Psi), \Psi)$  se puede determinar mediante el estudio de la función  $L(\Psi)$ .

Un resultado interesante relativo al coste óptimo nos lo proporciona el siguiente lema.

**Lema 1** Sean  $T(\Psi)$ ,  $C(T(\Psi), \Psi)$  y  $L(\Psi)$  dadas por (8), (9) y (12), respectivamente. Si  $\Psi_0$  es una raíz de la ecuación  $L(\Psi) = 0$ , entonces:

\*El coste total del inventario en  $(T^*(\Psi_0), \Psi_0)$  es  $C(T^*(\Psi_0), \Psi_0) = D[\xi_0 + \pi\Psi_0 + \Gamma\Psi_0 / (1+\gamma\Psi_0)]$ .

\*La longitud óptima del ciclo asociado a  $\Psi_0$  es  $T^*(\Psi_0) = [\xi_0 + \pi\Psi_0 + \Gamma\Psi_0 / (1+\gamma\Psi_0)] / h + \Psi_0$ .

### Demostración.

De (12), se sigue que

$$D^2 \left( \xi_0 + \frac{\Gamma\Psi}{1+\gamma\Psi} + \pi\Psi \right)^2 + D^2 h \pi \Psi^2 + \frac{2D^2 h}{\gamma^2} \Gamma \left( \ln(1+\gamma\Psi) - \frac{\gamma\Psi}{1+\gamma\Psi} \right) - 2KDh = 0.$$

Haciendo ahora unas sencillas operaciones aritméticas, y teniendo en cuenta (9), resulta

$$\begin{aligned} D^2 [\xi_0 + (h + \pi)\Psi_0 + \Gamma\Psi_0 / (1+\gamma\Psi_0)]^2 \\ = 2KDh + 2D^2 h (\xi_0 + \Gamma/\gamma)\Psi_0 + D^2 h (\pi + h)\Psi_0^2 - 2D^2 h \Gamma \ln(1+\gamma\Psi_0) / \gamma^2 \\ = [C(T^*(\Psi_0), \Psi_0) + Dh\Psi_0]^2. \end{aligned}$$

y, en consecuencia,  $C(T^*(\Psi_0), \Psi_0) = D[\xi_0 + \pi\Psi_0 + \Gamma\Psi_0 / (1+\gamma\Psi_0)]$ . El resto se sigue fácilmente de (10).

El valor óptimo de  $\Psi$  se puede caracterizar mediante el siguiente resultado.

**Teorema 2** Sean  $L(\Psi)$  dada por (12),  $\Psi_1 = \arg_{\Psi \in (0, \infty)} \{L(\Psi) = 0\}$  y los valores de  $\Delta = (\xi_0 D)^2$

$-2KhD$ ,  $\Gamma = \rho[\omega - \pi + \gamma(\pi_0 + s - \rho - \omega_0)]$ ,  $C_0 = \sqrt{2KDh}$  y  $C_\infty = D(\xi_0 + \Gamma/\gamma)$ . Si  $0 < \pi < -\Gamma$ ,

sean  $r = (\sqrt{-\Gamma/\pi} - 1)/\gamma$ ,  $\Psi_2 = \arg_{\Psi \in (r, \infty)} \{L(\Psi) = 0\}$  y  $C_2 = D[\xi_0 + \pi\Psi_2 + \Gamma\Psi_2 / (1+\gamma\Psi_2)]$ .

El valor de  $\Psi$  que minimiza la función  $C(T(\Psi), \Psi)$  se muestra en la Tabla 1 (nótese que las celdas con “—” indican casos no posibles).

**Demostración.**

De (12) se sigue que la derivada primera de  $L(\Psi)$  es

**Tabla N°1.** Valor de  $\Psi^*$

	$\pi > 0$					$\pi = 0$			
	$\Gamma > 0$	$\Gamma < 0$				$\Gamma > 0$	$\Gamma = 0$	$\Gamma < 0$	
		$\pi - \Gamma$	$\pi < -\Gamma$					$C_\infty \geq C_0$	$C_\infty < C_0$
			$L(r) \geq 0$	$L(r) < 0$					
			$C_2 \geq C_0$	$C_2 < C_0$					
$\Delta > 0$	0	0	0	0	$\Psi_2$	0	0	0	$\infty$
$\Delta = 0$	0	0	—	—	$\Psi_2$	0	$[0, \infty)$	—	$\infty$
$\Delta < 0$	$\Psi_1$	$\Psi_1$	—	—	$\Psi_2$	$\Psi_1$	$\infty$	—	$\infty$

$$L'(\Psi) = 2D^2 (\pi + \Gamma / (1 + \gamma\Psi)^2) (\xi_0 + (h + \pi)\Psi + \Gamma\Psi / (1 + \gamma\Psi)). \tag{15}$$

Como  $\xi_0 + \pi\Psi + \Gamma\Psi / (1 + \gamma\Psi) = [\xi_0 + (\rho\omega + \gamma(\pi_0 + s - \rho))\Psi + (1 - \rho + \gamma\Psi)\pi\Psi] / (1 + \gamma\Psi) \geq 0$ ,

resulta que

$$\text{sign} \{L'(\Psi)\} = \text{sign} \{ \pi + \Gamma / (1 + \gamma\Psi)^2 \} \tag{16}$$

Teniendo en cuenta (16) y que  $L(0)=\Delta$ , vamos a considerar las siguientes posibilidades:

1. En los casos (A)  $\pi=0, \Gamma>0$ ; (B)  $\pi>0, \Gamma\geq 0$  y (C)  $0<-\Gamma\leq\pi$ , se verifica  $L'(\Psi)>0$  para  $\Psi>0$ ; por tanto,  $L(\Psi)$  es una función estrictamente creciente con  $\lim_{\Psi \rightarrow \infty} L(\Psi) = \infty$ . Luego:

(a) Cuando  $\Delta\geq 0$ , la función  $C(T(\Psi), \Psi)$  alcanza su mínimo en  $\Psi^*=0$ , con valor  $C_0 = \sqrt{2KDh}$ .

(b) Cuando  $\Delta<0$ , la función  $C(T(\Psi), \Psi)$  alcanza su mínimo en un punto  $\Psi^*=\Psi_1$ , con  $0<\Psi_1<\infty$ . Este valor es, precisamente, la única raíz positiva de la ecuación  $L(\Psi)=0$ .

2. Si  $\pi=\Gamma=0$ , entonces  $L(\Psi)$  es una función constante con  $L(\Psi)=\Delta$ . Luego:

(a) Cuando  $\Delta>0$ , la función  $C(T(\Psi), \Psi)$  es estrictamente creciente y alcanza su mínimo en  $\Psi^*=0$ , con valor  $C_0 = \sqrt{2KDh}$ .

(b) Cuando  $\Delta=0$ , la función  $C(T(\Psi), \Psi)$  es constante en el intervalo  $[0, \infty)$ ; es decir, alcanza su mínimo en todo punto  $\Psi^*$  de ese intervalo, con valor  $C_0 = \sqrt{2KDh}$ .

(c) Cuando  $\Delta<0$ , la función  $C(T(\Psi), \Psi)$  es estrictamente decreciente y, por tanto, alcanza su mínimo en  $\Psi^*=\infty$ , con valor  $C_\infty = D(\xi_0 + \Gamma / \gamma)$ .

3. Si  $\pi=0$  y  $\Gamma<0$ , entonces  $L'(\Psi)<0$  para  $\Psi>0$ ; por tanto,  $L(\Psi)$  es una función estrictamente decreciente con  $\lim_{\Psi \rightarrow \infty} L(\Psi) = -\infty$ . Luego:
- (a) Cuando  $\Delta>0$ , la ecuación  $dC(T(\Psi), \Psi)/d\Psi=0$  tiene sólo una solución positiva,  $r_0$ . De esta forma, la función  $C(T(\Psi), \Psi)$  es creciente en  $(0, r_0)$  y decreciente en  $(r_0, \infty)$ . Por tanto,  $C(T(\Psi), \Psi)$  alcanza su mínimo en  $\Psi^*=0$  o  $\Psi^*=\infty$ , con valores  $C_0$  y  $C_\infty$ , respectivamente.
  - (b) Cuando  $\Delta=0$ , la ecuación  $dC(T(\Psi), \Psi)/d\Psi=0$  tiene sólo la solución  $r_0=0$ . De esta forma, la función  $C(T(\Psi), \Psi)$  es decreciente en  $(0, \infty)$ . Por tanto,  $C(T(\Psi), \Psi)$  alcanza su mínimo en  $\Psi^*=\infty$ , con valor  $C_\infty$ .
  - (c) Cuando  $\Delta<0$ , la función  $C(T(\Psi), \Psi)$  alcanza su mínimo en  $\Psi^*=\infty$ , con valor  $C_\infty$ .
4. Si  $0<\pi<-\Gamma<0$ , entonces la ecuación  $L'(\Psi)=0$  tiene una única raíz positiva,  $r = (\sqrt{-\Gamma/\pi} - 1)\gamma$ , de manera que  $L'(\Psi)<0$  para  $0<\Psi<r$  y  $L'(\Psi)>0$  para  $\Psi>r$ . Además, Luego:
- (a) Cuando  $\Delta>0$ , consideremos los dos casos siguientes: (i) Si  $L(r)\geq 0$ , entonces  $L(\Psi)>0$  para  $\Psi\neq r$ ; por tanto,  $C(T(\Psi), \Psi)$  es una función estrictamente creciente que alcanza su mínimo en  $\Psi^*=0$ , con valor  $C_0$ . (ii) Si  $L(r)<0$ , entonces la ecuación  $L(\Psi)=0$  tiene dos soluciones en el intervalo  $(0, \infty)$ :  $r_1$ , con  $0<r_1<r$ , y  $\Psi_2$ , con  $\Psi_2>r$ . De esta forma,  $C(T(\Psi), \Psi)$  es estrictamente creciente en  $(0, r_1)$ , estrictamente decreciente en  $(r_1, \Psi_2)$  y estrictamente creciente en  $(\Psi_2, \infty)$ . En consecuencia,  $C(T(\Psi), \Psi)$  alcanza su mínimo en  $\Psi^*=0$  o  $\Psi^*=\Psi_2$ , con valores  $C_0$  y  $C_2$ , respectivamente. Además, del Lema 1 se sigue que  $C_2 = C(T(\Psi_2), \Psi_2) = D[\xi_0 + \pi\Psi_2 + \Gamma\Psi_2 / (1 + \gamma\Psi_2)]$ .
  - (b) Cuando  $\Delta\leq 0$ , necesariamente  $L(r)<0$  y, como  $\lim_{\Psi \rightarrow \infty} L(\Psi) = \infty$ , resulta que la ecuación  $L(\Psi)=0$  tiene una única raíz  $\Psi_2$  en el intervalo  $(r, \infty)$ . Así, la función  $C(T(\Psi), \Psi)$  es estrictamente decreciente en  $(0, \Psi_2)$  y estrictamente creciente en  $(\Psi_2, \infty)$ . En consecuencia,  $C(T(\Psi), \Psi)$  alcanza su mínimo en  $\Psi^*=\Psi_2$ , con valor  $C_2$ .

### Ejemplos numéricos

A continuación exponemos algunos ejemplos que ilustran los resultados teóricos previamente presentados.

**Ejemplo 1** Consideremos un sistema de inventario con las hipótesis dadas en este trabajo, en el que los valores de los parámetros son los siguientes:  $D=25$ ,  $K=50$ ,  $h=0.5$ ,  $\omega_0=1$ ,  $\omega=0$ ,  $\pi_0=0$ ,  $\pi=1$ ,  $\rho=9$ ,  $s=12$ ,  $\rho=0.9$  y  $\gamma=0.1$ .

Como  $\Gamma=-0.72$ ,  $\pi=1$  y  $\Delta=-350$ , aplicando el Teorema 2, el valor óptimo de  $\Psi$  es la solución de la ecuación  $45000\ln(1+\Psi/10) + 270000(7\Psi+58)/(\Psi+10)^2 - (1875/2)\Psi^2 + 7500\Psi - 156250=0$ . Utilizando el método de Newton-Raphson, se obtiene  $\Psi^* = \Psi_1 = 0.600793$ . Ahora, del Lema 1, se sigue que  $T^* = 3.38627$  y que el coste mínimo es  $C(T^*, \Psi^*) = 34.8184$ .

**Ejemplo 2** Consideremos el modelo de inventario del ejemplo anterior, pero cambiando ahora los valores de los parámetros  $K$ ,  $\omega_0$  y  $\pi$  por  $K=305$ ,  $\omega_0=3.55$  y  $\pi=0.1$ . Ahora  $\Gamma=-0.1395$ ,  $\Delta=9.39063$ ,  $r=1.81101$  y  $L(r)=-145.073$ . Aplicando el Teorema 2, el valor óptimo de  $\Psi$  puede ser 0 o  $\Psi_2$ , siendo esta última solución la raíz de la ecuación  $L(\Psi)=0$  en el intervalo  $(r, \infty)$ . Usando nuevamente el método de Newton-Raphson, se obtiene  $\Psi_2^* = 3.59389$ . Como  $C_2 = C(T(\Psi_2), \Psi_2) = 87.1396 < C_0 = C(T(0), 0) = 87.3212$ , la solución óptima es  $\Psi^* = \Psi_2^* = 3.59389$  y, del Lema 1, se

sigue  $T = 10.5651$ , con coste  $C(T, \Psi^*) = 87.1396$ .

**Ejemplo 3** Supongamos los mismos datos del ejemplo anterior, pero modificando el valor de  $\pi$  por  $\pi = 0$ . Ahora se tiene  $\Gamma = -0.0495$  y  $\Delta$  permanece inalterada porque no depende del parámetro  $\pi$ . Como  $C_\infty = 75 < C_0 = C(T(0), 0) = 87.3212$ , concluimos que  $\Psi^* = \infty$  y  $C(T, \Psi^*) = 75$ .

**Ejemplo 4** Utilicemos los mismos datos del Ejemplo 2, pero cambiando el valor de  $\pi$  por  $\pi = 0.5$ . Ahora se tiene  $\Gamma = -0.4995 \geq -\pi$ . Por tanto, del Teorema 2 se sigue que  $\Psi^* = 0$ . Además, de (8), se sigue  $T = 6.98570$  y, de (10), se tiene  $C(T, \Psi^*) = 87.3212$ .

**Casos particulares**

- Si consideramos  $\pi = 0$ , entonces se obtiene el sistema de inventario estudiado por San-José et al. (2005b). Nótese que ahora la solución óptima viene caracterizada solamente por los signos de  $\Gamma$  y  $\Delta$ . Así, la política óptima que se obtiene con el Teorema 2 coincide con la presentada en el trabajo previamente citado.
- Si en la función de impaciencia analizada consideramos que el parámetro  $\gamma$  tiende a cero, entonces, en el límite, se tiene  $\beta(\tau) = \rho$  para  $\tau > 0$  y recaemos en el modelo con una proporción fija de demanda pendiente estudiado por San-José et al. (2009).

En primer lugar, vamos a comprobar que, en este caso, la condición  $\pi > 0$  y  $\pi \leq -\Gamma$  no puede verificarse. En efecto, si  $\pi > 0$ , entonces  $\rho$  debe ser menor que 1, por tanto,  $(1-\rho)\pi + \rho\omega > 0$  y, teniendo en cuenta que ahora  $\Gamma = \rho(\omega - \pi)$ , resulta que  $\pi > -\Gamma$ .

Por otro lado, de (13), se sigue que  $\lim_{\gamma \downarrow 0} L(\Psi) = \Delta + 2D^2\xi_0\xi\Psi + 2D^2\xi(h + \xi)\Psi^2$ , siendo  $\xi = \rho\omega + (1-\rho)\pi$ . En consecuencia,  $\lim_{\gamma \downarrow 0} \Psi_1 = \Psi_3$ , donde  $\Psi_3 = \sqrt{\frac{2Kh}{D\xi(h+\xi)} - \frac{h\xi_0^2}{\xi(h+\xi)^2}} - \frac{\xi_0}{h+\xi}$ .

Aplicando ahora el Teorema 2, se deduce que el valor de  $\Psi$  que minimiza la función  $C(T(\Psi), \Psi)$  está dado en la Tabla 2. Es decir, se obtiene la misma política óptima que determinaron los autores antes mencionados.

**Tabla N°2.** Valor de  $\Psi^*$  para una fracción fija  $\rho$  de demanda acumulable

	$\xi > 0$	$\xi = 0$
$\Delta > 0$	0	0
$\Delta = 0$	0	$[0, \infty)$
$\Delta < 0$	$\Psi_3$	$\infty$

**CONCLUSIONES**

En este trabajo se estudia un modelo de revisión continua y demanda determinística en el que, cuando hay escasez, la demanda es parcialmente satisfecha. Se supone que los clientes son impacientes y que, por tanto, durante el período de escasez solamente se satisface una fracción de la demanda. Se estudia el caso donde la fracción de clientes que esta dispuestos a esperar viene determinada por una función hiperbólica del tiempo que los clientes esperan hasta que reciben el artículo solicitado. Se considera que el coste unitario por demanda pendiente de servir y el coste unitario por cada unidad cuya demanda se pierde dependen del tiempo que

resta hasta la llegada del siguiente pedido. La política óptima se obtiene por medio de un procedimiento de optimización secuencial en dos etapas. La solución óptima obtenida depende de los valores de los parámetros de entrada y si se verifican o no ciertas condiciones sobre el signo de unos parámetros auxiliares. Al considerar nulos algunos de los cuatro parámetros (pero no todos) que determinan los costes de escasez, se obtienen diferentes modelos, varios de los cuales se encuentran en la literatura sobre el tema, pero otros no han sido presentados previamente.

Un posible trabajo futuro es realizar un análisis de sensibilidad del modelo aquí propuesto y analizar cómo influye en el beneficio, o en el coste, la consideración de variaciones en el rango de los parámetros. Otro es el de analizar el modelo de inventario cuando se considera la posibilidad de deterioro en el artículo, o bien cuando existe una tasa de reposición finita, de forma que el reabastecimiento de los artículos no fuese instantáneo. Por último, sería también interesante estudiar modelos de inventario con demanda parcialmente satisfecha, pero suponiendo que la tasa de demanda es una variable aleatoria.

## REFERENCIAS

**Abad, P.L. (1996).** Optimal pricing and lot-sizing under conditions of perishability and partial backordering. *Management Science*, 42(8), 1093-1104.

**Abad, P.L. (2001).** Optimal price and order size for a reseller under partial backordering. *Computers and Operations Research*, 28 (1), 53-65.

**Abad, P.L. (2008).** Optimal price and order size under partial backordering incorporating shortage, backorder and lost sale costs. *International Journal of Production Economics*, 114(1), 179-186.

**Bhunja, A.K., Kundu, S., Sannigrahi, T., & Goyal, S.K. (2009).** An application of tournament genetic algorithm in a marketing oriented economic production lot-size model for deteriorating items. *International Journal of Production Economics*, 119(1), 112-121.

**Chang, C.T., Goyal, S.K., & Teng, J.T. (2006).** On "An EOQ model for perishable items under stock-dependent selling rate and time-dependent partial backlogging" by Dye and Ouyang. *European Journal of Operational Research*, 174(2), 923-929.

**Chern, M.S., Chan, Y.-L., & Teng, J.-T. (2005).** A comparison among various inventory shortage models for deteriorating items on the basis of maximising profit. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 22(1), 121-134.

**Chu, P., & Chung, K.J. (2004).** The sensitivity of the inventory model with partial backorders. *European Journal of Operational Research*, 152(1), 289-295.

**Dye, C.Y. (2007).** Joint pricing and ordering policy for a deteriorating inventory with partial backlogging. *Omega*, 35(2), 184-189.

**Dye, C.Y., Hsieh, T.P., & Ouyang, L.Y. (2007).** Determining optimal selling price and lot size with a varying rate of deterioration and exponential partial backlogging. *European Journal of Operational Research*, 181(2), 668-678.

**Dye, C.Y., & Ouyang, L.Y. (2005).** An EOQ model for perishable items under stock-dependent selling rate and time-dependent partial backlogging. *European Journal of Operational Research*, 163(3), 776-783.

**Hadley, G. & Whitin, T.M. (1963).** Analysis of Inventory Systems. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

- Leung, K.N. (2008).** Technical Note: A use of the complete squares method to solve and analyze a quadratic objective function with two decision variables exemplified via deterministic inventory model with a mixture of backorders and lost sales. *International Journal of Production Economics*, 113(1), 275-281.
- Montgomery, D.C., Bazaraa, M.S., & Keswani, A.K. (1973).** Inventory models with a mixture of backorders and lost sales. *Naval Research Logistics Quarterly*, 20(2), 255-263.
- Pal, A.K., Bhunia, A.K., & Mukherjee, R.N. (2006).** Optimal lot size model for deteriorating items with demand rate dependent on displayed stock level (DSL) and partial backordering. *European Journal of Operational Research*, 175(2), 977-991.
- Papachristos, S., & Skouri, K. (2003).** An inventory model with deteriorating items, quantity discount, pricing and time-dependent partial backlogging. *International Journal of Production Economics*, 83(3), 247-256.
- Park, K.S. (1982).** Inventory model with partial backorders. *International Journal of Systems Science*, 13(12), 1313-1317.
- Park, K.S. (1983).** Another inventory model with a mixture of backorders and lost sales. *Naval Research Logistics Quarterly*, 30 (3), 397-400.
- Pentico, D.W., & Drake, M.J. (2009).** The deterministic EOQ with partial backordering: a new approach. *European Journal of Operational Research*, 194(1), 102-113.
- Rosenberg, D. (1979).** A new analysis of a lot size model with partial backlogging. *Naval Research Logistics Quarterly*, 26(2), 346-353.
- San José, L.A., Sicilia, J., & García-Laguna, J. (2005a).** An inventory system with partial backlogging modeled according to a linear function. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 22(2), 189-209.
- San José, L.A., Sicilia, J., & García-Laguna, J. (2005b).** The lot size-reorder level inventory system with customers impatience functions. *Computers & Industrial Engineering*, 49(3), 349-362.
- San José, L.A., Sicilia, & García-Laguna, J. (2006).** Analysis of an inventory system with exponential partial backordering. *International Journal of Production Economics*, 100(1), 76-86.
- San José, L.A., Sicilia, J., & García-Laguna, J. (2009).** A general model for EOQ inventory systems with partial backlogging and linear shortage costs. *International Journal of Systems Science*, 40(1), 59-71.
- Skouri, K., & Papachristos, S. (2003).** Optimal stopping and restarting production times for an EOQ model with deteriorating items and time-dependent partial backlogging. *International Journal of Production Economics*, 81-82, 525-531.
- Wang, S.P. (2002).** An inventory replenishment policy for deteriorating items with shortages and partial backlogging. *Computers and Operations Research*, 29(14), 2043-2051.
- Wu, K.S., Ouyang, L.Y., & Yang, C.T. (2006).** An optimal replenishment policy for non-instantaneous deteriorating items with stock-dependent demand and partial backlogging. *International Journal of Production Economics*, 101(2), 369-384.
- Yang, G.K. (2007).** Note on sensitivity analysis of inventory model with partial backorders. *European Journal of Operational Research*, 177(2), 865-871.