ISSN 0717-9103
ISSN Online 0718-8307
Universidad del Bío-Bío

DIMENSIONAMIENTO DE LOTES Y PROGRAMACIÓN DE UNA MÁQUINA PARA MÚLTIPLES PRODUCTOS CON SETUP Y ESCASEZ

SCHEDULING AND LOT SIZING OF MULTIPLE PRODUCTS IN A SINGLE MACHINE WITH SETUP AND BACKLOGGING

Horacio Ocampo Azocar[1], Eduardo Salazar Hornig[1,♦]

RESUMEN

En este trabajo se desarrolla un procedimiento para resolver una extensión del problema clásico del lote económico y programación (ELSP), con múltiples productos y considerando tiempos de preparación dependientes de la secuencia (setup) y satisfacción atrasada de la demanda en un entorno productivo de una máquina. El procedimiento utiliza una heurística de la literatura para generar secuencias de lotes de producción, las que son evaluadas mediante un modelo de optimización no lineal desarrollado por los autores que incorpora la satisfacción de demanda atrasada (backlogging) y el cumplimiento de niveles de servicio, minimizando los costos de setup, de inventario y de atraso en un horizonte de tiempo. El método se ilustra mediante la resolución de un problema de tamaño reducido.

Palabras Claves: Dimensionamiento de lotes, programación de una máquina, tiempo de preparación dependiente de la secuencia, escasez, satisfacción atrasada de demanda.

ABSTRACT

This work develops a methodology to solve an extension of the Economic Lot Scheduling Problem (ELSP) satisfying the demand for multiple products considering sequence dependent setup times and backlogging in a single machine. The fundamental problem is to determine the production sequence and lot size for each production run, in order to meet customer demand in a given planning horizon, minimizing setup, inventory and backlogging costs. An incremental heuristic procedure that interchange two and three lots to obtain the lot production sequence is applied. These lot sequences are evaluated with a nonlinear optimization model to determine the lot size for each lot of the sequence. The method is illustrated solving a small instance of the problem.

Keywords: Lot sizing, single machine scheduling, sequence dependent setups, shortages,

[1]Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Concepción, Concepción. Chile. joseocampo@udec.cl

♦Autor para correspondencia: esalazar@udec.cl

Recibido:19.04.2012 Aceptado:18.07.2014

INTRODUCCION

En la administración de inventarios se consideran costos de adquisición y/o producción, de mantención y de escasez (falta de existencias) de inventarios. El costo de mantención de inventarios involucra el costo de capital (costo de oportunidad) que corresponde al costo por tener dinero invertido en productos y/o insumos. Según Ballou (2004), el costo anual de mantener una unidad en inventario generalmente representa entre un 20% y 40% de su valor, mientras que el costo de escasez se produce cuando un pedido no puede ser satisfecho en su fecha de entrega, generando un costo por pérdida de venta o por retraso en la entrega.

Por otra parte, en algunos sistemas de manufactura se requiere un tiempo significativo de preparación de una máquina para iniciar una corrida de producción. Este tiempo de preparación contempla actividades como limpieza, ajuste de herramientas, etc., las que pueden generar costos significativos. Cuando los tiempos y/o costos de preparación dependen de la secuencia en que se procesan los productos, se habla de tiempos de preparación dependientes de la secuencia (*setup*).

En la literatura existen modelos clásicos para resolver en forma simultánea un problema de programación y dimensionamiento de lotes (*scheduling and lotsizing*). El problema de programación del lote económico ELSP (*economiclotsizeand schedulingproblem*) es uno de ellos. Este problema es de una reconocida complejidad *NP–Hard*, agregando a ésta la naturaleza no lineal del problema.

El ELSP se puede dividir en dos partes, una discreta y otra continua. En la primera parte el problema consiste en encontrar las frecuencias de producción (número de lotes) de cada producto y la secuencia de lotes de producción. La segunda parte consiste en determinar en forma exacta los tamaños de lotes a través de un programa de producción que minimice los costos totales promedio de *setup*, mantención y escasez de inventario por unidad de tiempo. Esta última parte entrega los tiempos de producción de cada lote, tiempos de*setup* ytiempos de disponibilidad de máquina, de manera de cumplir con la demanda durante un tiempo de ciclo.

Existen diferentes enfoques para resolver el problema de lotificación del ELSP, el enfoque de *ciclo común* atribuido a Hanssmann (1962) asume que los ciclos productivos para todos los productos son los mismos, es decir, cada producto será producido una sola vez en cada ciclo. Elmaghraby (1978) señala que el costo obtenido con el enfoque de *ciclo común* se puede considerar un *límite superior* del costo óptimo del ELSP. El enfoque de*ciclo de período básico* fue propuesto por Bomberger (1966) y contempla un ciclo para cada uno de los productos, cada ciclo debe ser un múltiplo entero de un *ciclo básico*, el que debe tener una longitud suficiente para acomodar la producción de todos los productos. Elmaghraby (1978) propuso una extensión a este enfoque denominado *ciclo o periodo básico extendido*; la diferencia es que se consideran dos periodos básicos consecutivos y se cargan los productos en esos dos periodos. El enfoque de *lotes de tamaño variable* (VLS)atribuido a Maxwell (1964) y Delporte y Thomas (1978) es el caso general de los enfoques anteriores y es más flexible ya que permite diferentes tamaños de lote para diferentes productos dentro de un ciclo. Con esto se busca superar los problemas de factibilidadque pueden tener los otros métodos debido a la necesidad de que los ciclos sean múltiplos enteros de cada periodo básico(Moon *et al*., 2002). Para un entorno comercial actual de personalización en masa el enfoque VLS es más realista y adecuado que el de *ciclo común* (Huang &Yao, 2013).

Dobson (1987) desarrolló la heurística DH (*Dobson Heuristic*) para el enfoque VLS con *setup* independiente de la secuencia. Demostró que su heurística siempre genera programas factibles y soluciones de buena calidad resolviendo sub problemas del problema original a través de relajaciones. Khouja *et al.* (1998) aplicó un *algoritmo genético* al ELSP con tiempos de *setup* independientes de la secuencia y enfoque de *ciclo básico* utilizando el problema de Bomberger (1966). La desviación del *algoritmo genético* con respecto a la cota inferior superó el 80%, en cambio, la heurística DH mostró una desviación respecto a la cota inferior del mismo problema menor al 10%.Según Moon *et al.* (2002) la causa de esta diferencia de desempeño se debe a que el enfoque de *ciclo básico* tiene un desempeño inferior al enfoque VLS. En el estudio de Moon *et al.* (2002) se utilizó un *algoritmo genético híbrido*, el enfoque VLS con *setup* independientes de la secuencia aplicado a los problemas de Bomberger (1966) y Mallya (1992). La heurística DH se modificó utilizandoun *algoritmo genético* para encontrar una secuencia de lotes de producción; en este estudio el *algoritmo genético híbrido* de Moon *et al*. (2002) superó a la heurística DH. Raza *et al*. (2006) propusieron un algoritmo *tabusearch* y una heurística de *búsqueda en vecindad*;el método de solución propuesto superó a la heurística DH modificada, entregando la mejor solución.

Raza y Akgunduz (2008) resolvieron un ELSP con el enfoque VLS y *setup* independiente de la secuencia empleando la heurística DH, el *algoritmo genético híbrido*, una heurística de *búsqueda en vecindad*, el algoritmo *tabu search* y un algoritmo *simulated annealing*. Resolvieron los problemas de Bomberger (1966), Mallya (1992) y Raza *et al*. (2006). El método *simulated annealing* obtuvo mejores resultados que la heurísticas DH, *algoritmo genético híbrido* y de *búsqueda en vecindad*. En comparación con el método *tabu search* de Raza *et al*. (2006), *simulated annealing* obtuvo soluciones de similar calidad, sin embargo tuvo una convergencia más rápida.

Entre los estudios que han realizado extensiones del problema ELSP clásico se encuentra el de Gallego y Roundy (1992) que consideraron el ELSP con retención de órdenes (*backlogging*) utilizando el enfoque VLS pero sin *setup*. Según esta investigación, existen dos motivos o limitaciones del ELSP para considerar entregas pendientes: una económica, y otra relacionada a demandas aleatorias y fallas imprevistas de la máquina. Gupta (1992) también investigó el ELSP con falta de inventario bajo el enfoque de *ciclo común* y tiempos de *setup* independientes de la secuencia. El autor plantea que se puede permitir escasez de inventario en ciertas situaciones cuando la demanda del producto es baja o cuando los productos son muy especializados.

El trabajo de Dobson (1992) usa un enfoque de *extensión del ciclo básico*, realiza una *relajación lagrangeana* de la formulación original generando un sub problema para el dimensionamiento de lotes y otro para la secuencia de proceso de los lotes, mostrando que su metodología de solución genera programas factibles para el caso de *setup* dependiente e independiente de la secuencia. Shirodkar *et al*. (2011) estudiaron la parte continua del ELSP con *setup* dependiente de la secuencia utilizando el enfoque VLS, demostrando que la formulación de Dobson (1992) siempre entrega soluciones infactibles para el ELSP con *setup* dependiente de la secuencia. La formulación de Shirodkar *et al*. (2011) obtiene soluciones factibles para ambas condiciones.

Wagner y Davis (2002) desarrollaron un procedimiento heurístico para resolver un ELSP con *setup* dependiente de la secuencia bajo el enfoque de *extensión del ciclo básico* demostrando que su procedimiento puede superar a la heurística DH en casos de alta utilización y tiempos y/o costos de *setup* significativos, en tiempos computacionales significativamente superiores a la heurística Oh y Karimi (2001) estudiaron el ELSP con *setup* dependiente de la secuencia y, a diferencia de la mayoría de las investigaciones, los autores utilizaron un tiempo de ciclo conocido, debido a que en la práctica esto es una decisión de la administración.

Desde un punto de vista contable se busca mantener un bajo nivel de inventario, mientras que desde un punto de vista operativo se requiere de altos niveles de inventario para realizar largas corridas de producción evitando tiemposde*setup* permitiendo a su vez responder a tiempo la demanda de productos evitando entregar atrasado. Producir en grandes lotes, podría implicar un ahorro en costos de *setup*, aumentando la productividad, pero aumenta los costos de mantención de inventario y los costos de la falta de inventario de otros productos deteriorando el nivel de servicio al cliente.

En este contexto, la programación de producción tiene restricciones tanto operativas como de servicio (Jordan, 1996), por lo que lograr un adecuado balance entre estos objetivos en conflicto es el desafío de la gestión de operaciones actual.

De la revisión realizada, no se han encontrado trabajos que traten el problema ELSP para múltiples productos que consideren conjuntamente *setup* dependiente de la secuencia, retención de órdenes (*backlogging*) y cumplimiento de niveles de servicio.

En esta investigación se desarrolla un método de solución para el problema de programación de lote económico (ELSP),considerando satisfacer la demanda de múltiples productos, con *setup* dependiente de la secuencia, con satisfacción de demanda atrasada (*backlogging*) y niveles de servicio. El objetivo es la minimización del costo promedio de *setup*, de mantención y escasez de inventario en un entorno productivo de una máquina. Se consideran tanto tamaños como número variable de lotes de producción para cada producto en un periodo de planificación (tiempo de ciclo).El trabajo integra un enfoque discreto, como es el de generar las secuencias de lotes a procesara través de la heurística de Wagner y Davis (2002), con un enfoque de optimización que extiende el modelo de Shirodkar *et al*. (2011) para determinar el tamaño y tiempo de proceso de cada lote en un entorno de producción de una máquina con tasa de producción y de demanda constantes.

Problema ELSP con setup y escasez de inventario

En la programación de la producción y el control de inventarios de varios productos se manejan al menos tres aspectos: el dimensionamiento de los lotes (cuántas unidades producir en cada lote), la secuenciación (en qué orden se deben producir los lotes) y la programación (cuándo se deben producir los lotes). En un sistema de una máquina y varios productos estos tres aspectos pueden considerarse en forma simultánea (Brander, 2005).

En resumen, el problema fundamental consiste en determinar el tamaño de los lotes para diferentes productos, la secuencia en la cual estos lotes deben ser procesados en una máquina, de manera de satisfacer la demanda en un horizonte de planificación, minimizando los costos de *setup*, mantención y escasez (*backlogging*) de inventario promedio por unidad de tiempo. Los supuestos del problema son:

- Sistema de una máquina (sólo un lote se puede procesar a la vez).
- Múltiples productos.
- Tasa de producción y tasa de demanda determinista y constante.
- Capacidad de producción restringida pero suficiente para cumplir con la demanda total.
- Tiempos y costos de *setup*dependientes de la secuencia de producción.
- Se permite falta de inventario (escasez) suministrada en forma atrasada (*backlogging*).
- Costo de inventario (escasez) directamente proporcional al nivel de inventario (escasez).
- Escala continua de tiempo.
- Horizonte de planificación infinito (con tiempo de ciclo dado).

Modelo para el ELSP de múltiples productos con *setup* y escasez de inventarios

La metodología de solución propuesta es mixta y está compuesto por un procedimiento heurístico discreto que controla la generación incremental de secuencias de lotes, que son evaluadas por un modelo de optimización continua no lineal (NLP). El modelo NLP desarrollado en este trabajo como extensión del modelo de Shirodkar *et al.* (2011), incorpora la satisfacción de demanda atrasada (*backlogging*) y restricciones para el cumplimiento de niveles mínimos de servicio. El modelo no lineal determina el tamaño de los lotes, los tiempos de producción de los lotes, de manera de satisfacer la demanda de múltiples productos minimizando la función objetivo *costo total promedio de administración de inventario* (costos de *setup*, costos de mantención y escasez de inventario).

La Figura 1 ilustra la geometría del ELSP con la programación de 2 lotes de un producto A (lotes 1 y 3) y dos lotes de un producto B (lotes 2 y 4). Los tiempos s_1, s_2, s_3 y s_4 corresponden a los respectivos tiempos de s*etup* indicados en barra gruesa en el gráfico de la Figura 1. Los tiempos $t_1^k + t_2^k$ corresponden a los tiempos de producción a una tasa constante del lote k (t_1^k es el tiempo en que se satisface demanda y se recupera la escasez y t_2^k es el tiempo en el que se satisface demanda y se acumula inventario). Luego de eso los inventarios decrecen a la tasa de demanda constante hasta que se inicia la producción del siguiente lote del mismo producto. Los tiempos u^k corresponden a los tiempos disponibles de la máquina al finalizar el proceso de un lote, antes de comenzar el *setup* para el siguiente lote.

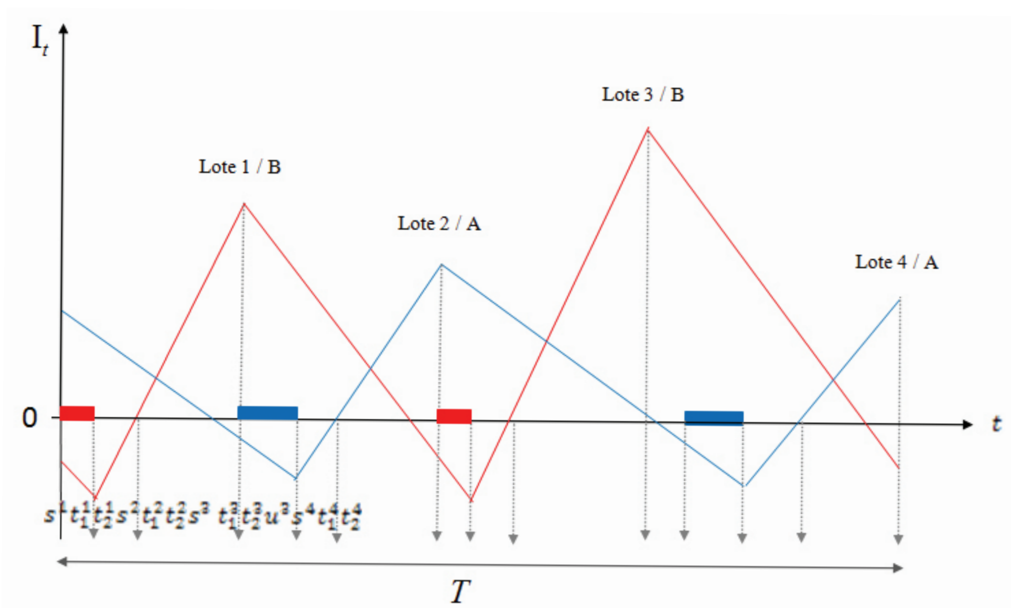

Figura 1. Geometría del ELSP con *setup* y escasez

Procedimiento Heurístico de Búsqueda de Secuencias

Para la generación de secuencias de lotes de producción se utiliza el procedimiento heurístico de Wagner y Davis (2002) en una versión reformulada desarrollada por los autores del presente trabajo (Figura 2). La heurística construye secuencias de complejidad creciente, comenzando con un lote por cada uno de los *n* productos, esto es frecuencia $f_i = 1$.

Previo a incrementar el número de lotes para un producto, la heurística evalúa la conveniencia de incrementar para todos los productos (pasos $f_i \leftarrow f_i + 1$ y $f_i \leftarrow f_i - 1$) incrementando finalmente sólo para el producto que en la correspondiente iteración ha producido la mejor solución ($f_b \leftarrow f_b + 1$).El criterio de término es arbitrario y corresponde al máximo número de lotes en la secuencia de producción (N_C), el que usualmente puede considerarse igual a *2n* (en promedio dos lotes por producto).

```
Procedure Wagner Davis
{
i←1; while(i≤ n)do { fi←1; i←i + 1; }
nc← n; ind← 0;
while(nc< NC )
{
i←ind; e*← ( secuencia inicial con alto costo asignado );
while(i≤ n)do
    {
if ( i> 0 ) do { fi←fi + 1; }

nr← 1;
while ( nr ≤NR ) do
  {
     SubProcedure One {Asigneel producto 1 como el primer producto en la secuencia y genere una
     secuencia aleatoria e utilizando la actual frecuencia de producción para cada producto, y evalúela a
     través del modelo no lineal. };

     SubProcedure Two {A partir de la secuencia e generada en SubProcedure One, evalúe todas las
     posibles secuencias generadas mediante intercambios de dos productos a través del modelo no
     lineal; retenga la secuencia de menor costo →e };

     Sub Procedure Three {A partir de la secuencia e generada enSub Procedure Two, evalúe todas
     las posibles secuencias generadas mediante intercambios de tres productos a través del modelo no
     lineal; retenga la secuencia de menor costo →e };

     Sub Procedure Four {A partir de la secuencia e generada en Sub Procedure Three, evalúe todas
     las posibles secuencias generadas mediante intercambios de dos productos a través del modelo no
     lineal; retenga la secuencia de menor costo →e};

if ( e<e* ) { e*←e; b = i; }
nr←nr + 1;
      }
if ( i> 0 ) do { fi←fi – 1; }
i←i + 1;
    }
fb←fb + 1; ind← 1; nc←nc + 1;
}
}
```

Figura 2. Heurística Reformulada.
Wagner y Davis (2002)

Modelo de Programación No Lineal

El modelo no lineal es un modelo cuadrático y está basado en el modelo de Shirodkar *et al*. (2011) modificado para permitir falta de existencias, agregando además una restricción para garantizar un determinado nivel de servicio al cliente. Los parámetros son los siguientes:

n : número de productos a procesar.
i : índice del producto i, i= 1, 2, … n.
m_i : frecuencia de producción (lotes) del producto i en el ciclo.
m : conjunto de frecuencias de producción; $m = \{ m_1, m_2, \dots ,m_n\}$.
T :Tiempo del ciclo (tiempo empleado en producir todos los productos).
p_i : Tasa de producción constante para el producto i [unidades / unidad de tiempo].
d_i : Tasa de demanda constante para el producto i [unidades / unidad de tiempo].
h_i : Costo de inventario del producto i [$ / (unidad · unidad de tiempo)].
π_i : Costo por falta de existencias del producto [$ / (unidad · unidad de tiempo)].

s_{ij}	: Tiempo de *setup* para cambiar la producción del producto *i* al *j.*
Cs_{ij}	: Costo de *setup* para cambiar la producción del producto *i* al *j*.
k	: índicede la posición de un lote en la secuencia.
K	: número total de lotes (corridas de producción) en el ciclo $K = \sum_{i=1}^{n} m_i$.
e_k	: lote producido en la posición *k* de la secuencia.
e	: secuencia de producción para un conjunto *m* de lotes con $e = \{ e_1, e_2, \dots, e_K\}$.
c(e)	: costo total de *setup* en el ciclo, asociado a la secuencia *e.*
s(e)	: tiempo total de *setup* en el ciclo, asociado a la secuencia *e.*
L_k	: conjunto de lotes previos de igual producto que lote *k* (incluye a lote *k*).
M_k	: conjunto de lotesprevios de igual producto que lote *k* (excluye a lote*k*).
t_p	: tiempo para producir *Q* unidades; $t_p = t_1 + t_2$

Las variables de decisión s^k, t_1^k, t_2^k, u^k, corresponden, respectivamente, al tiempo de *setup*, al tiempo de producción para completar demanda pendiente, al tiempo de producción que genera inventario y permite surtir demanda actual, y al tiempo disponible de la máquina, asociados al$k - ésimo$lote. Las variables $t_1^k \; y \, u^k$ pueden ser mayores o iguales a cero.

De acuerdo a Dobson (1987), para que exista una solución factible, el factor de producción o de utilización de la máquina debe ser menor que 1, esto es, $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d_i}{p_i}\right) < 1$ donde $\frac{d_i}{p_i}$ es la fracción de tiempo en que se produce la demanda d_i a la tasa de producción p_i del producto i.

Dado un tiempo de ciclo$T > 0$, una secuencia *e* de lotes a producir y un conjunto de frecuencias de producción $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ con$m_i > 0$ entero, se debe satisfacer la condición de que el tiempo total de *setup* en el ciclo, *s*(*e*), sea menor o igual a la fracción de tiempo disponible de la máquina en el ciclo (ver ecuación 1).

$$s(e) \leq T\left[1 - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d_i}{p_i}\right)\right] \tag{1}$$

Por lo que el modelo se plantea como:

$$min\frac{1}{T}\left\{c(e) + \sum_{k=1}^{K}\frac{1}{2}\left[\left(p^k - d^k\right)\left(\frac{p^k}{d^k}\right)\left(\pi^k (t_1^k)^2 + h^k (t_2^k)^2\right)\right]\right\} \tag{2}$$

sujeto a:

$$\left(\frac{p^k}{d^k}\right)\left(t_1^k + t_2^k\right) = \sum_{q \in L_k}\left(t_1^q + t_2^q + u^q\right) + \sum_{q \in M_k}\left(s^q\right) \quad k = 1, 2, \dots, K \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{K}\left(s^k + t_1^k + t_2^k + u^k\right) = T \tag{4}$$

$$t_1^k, t_2^k, u^k \geq 0 \tag{5}$$

La función objetivo (2) corresponde al costo total promedio por unidad de tiempo de *setup*: $\frac{1}{T}c(e)$ costo total de mantención de inventario: $\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{2}\left[\left(p^k - d^k\right)\left(\frac{p^k}{d^k}\right)\left(h^k (t_2^k)^2\right)\right]$ y costo total de escasez: $\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{2}\left[\left(p^k-d^k\right)\left(\frac{p^k}{d^k}\right)\left(\pi^k(t_1^k)^2\right)\right]$, ambos costos promedio por unidad de tiempo resultante para el programa de producción considerando la secuencia de lotes *e*. En el Anexo se muestra la geometría del problema para un producto y se derivan las expresiones para la función objetivo y restricciones considerando un lote de producción. Dado que el entorno productivo es de una máquina y el procesamiento de los lotes se hace en forma secuencial, por lo que la función objetivo para el caso de múltiples lotes resulta de la suma de los respectivos costos de cada lote. La presencia de *setup* no afecta la forma de cálculo dado que éstos ocurren durante los tiempos en que la máquina no produce.

Las restricciones (3) aseguran que la demanda se cumpla, eventualmente con retraso, permitiendo asegurar la sincronización necesaria. La restricción (4) asegura que el tiempo total empleado en *setup*, producción y disponibilidad de la máquina sea igual al tiempo del ciclo *T*.

Las restricciones (6) permita garantizar un nivel de servicio r_i para el producto i, el nivel de servicio se puede definir como la proporción de tiempo entre el período con inventario disponible y la duración del ciclo de producción de un lote k. Se demuestra que esta expresión es equivalente a la proporción de tiempo entre el tiempo de producción que genera inventario $\left(t_2^k\right)$ y el tiempo de producción total de ese lote $\left(t_1^k+t_2^k\right)$ Notar que $R^k=r_i$ si lote k corresponde a producto i.

$$\frac{t_2^k}{(t_1^k+\ t_2^k\ )} \geq\ R^k \quad k=1,2,\ldots,K \tag{6}$$

Ilustración

Para efecto de ilustración, se considera un problema de tamaño reducido con *n = 3* productos: A, B y C. Los parámetros se determinaron en forma aleatoria entre los siguientes valores: tasa de producción en el intervalo [5000, 20000], tasa de demanda en el intervalo [3000, 6000], costo de escasez en el intervalo [10; 20], costo de mantención de inventario en el intervalo [1, 10], tiempos de *setup* en el intervalo [0,05; 1,00] y costos de *setup* en el intervalo [20, 40]. La unidad de tiempo corresponde a días y se utiliza $ como unidad monetaria genérica.

En caso necesario, la tasa de producción se debe incrementar hasta que se alcanza un factor de utilización menor a uno. La tabla 1 muestra los parámetros del problema. Además, se consideró un horizonte de planificación de 30 días (*T = 30*).

Tabla1. Parámetros del Problema

Productos	A	B	C
Tasa de producción	9,600	18,700	18,200
Tasa de demanda	4,125	3,221	5,444
Costo faltante	10	14	19
Costo inventario	3	6	5

Matriz tiempos de setup

	A	B	C
A		0,78	0,47
B	0,33		0,66
C	0,48	0,82	

Matriz costos de setup

	A	B	C
A		32	21
B	25		40
C	26	37	

ISSN 0717-9103
ISSN Online 0718-8307
Universidad del Bío-Bío

Para resolver este problema se desarrolló una aplicación en planilla de cálculo *Excel* utilizando *Solver*, aplicación que fue validada mediante la correspondiente resolución de un modelo no lineal implementado en LINGO v11.0.Los cálculos se automatizaron de manera que sólo es necesario ingresar manualmente una secuencia de lotes de producción.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

La solución de la heurística de Wagner y Davis aplicada con máximo $2n = 6$ lotes se muestra en la tabla 2 y figura 3. Se obtiene una solución de $K = 5$ lotes, con frecuencias de producción $m = (2, 1, 2)$, esto es $m_A = 2$, $m_B = 1$ y $m_C = 2$. La secuencia de lotes de menor costo encontrada es: A – C – A – C – B, de costo total promedio de *setup*, mantención y escasez de inventario igual a 327.031 $/día. La solución encontrada por la heurística de Wagner y Davis resultó ser la solución óptima del problema (verificada mediante la evaluación exhaustiva de todas las secuencias posibles).

La tabla 2 muestra lotes de tamaño Q variable en la secuencia, es decir, lotes de un mismo producto con diferentes ciclos. Por ejemplo, entre el inicio del procesamiento del lote 1y del lote 3 (ambos lotes del producto A) transcurren cerca de 9,8 días. Como este es un programa cíclico, el tiempo que trascurre entre el lote 3 y el lote 1 del siguiente ciclo es de 20,2 días. Del tiempo total del programa, cerca de 27 días, la máquina produce con un factor de utilización de $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d_i}{p_i}\right) = 0,9$.

Además, la máquina está detenida 0,4 días luego de procesar el lote 2 (producto C). Las cantidades producidas de cada lote son equivalentes a las cantidades demandadas para el período correspondiente. La tabla 2 y la figura 4 muestran que el programa de producción comienza en el tiempo cero con la preparación (*setup*) de la máquina para el lote 1 de producto A (s^1),el cual tiene una duración de 0,3 días. En el momento de terminar este *setup* se genera un máximo de escasez de inventario del lote 3 de producto A del ciclo anterior, correspondiente a 5347 unidades equivalente a un período de falta de inventario de (t_1+t_4) = 2,3 días.

Tabla 2. Solución del Problema

Variables	Secuencia					Total
	A	C	A	C	B	programa
s	0,3	0,5	0,48	0,5	0,8	2,57
t_1	0,977	0,9	2,0	0,980	1,6	6,39
t_2	3,3	3,4	6,7	3,7	3,6	20,64
t_p	4,2	4,3	8,7	4,7	5,2	27,03
t_2+t_3	7,6	11,3	15,5	12,4	21,0	NA
t_1+t_4	2,3	3,0	4,7	3,3	9,0	NA
y	9,8	14,3	20,2	15,7	30,0	NA
u	0	0,4	0	0	0	0,40
Q	40.630	77.717	83.120	85.603	96.630	383.700
B	5.347	11.348	10.940	12.499	23.996	64.130
I_{max}	17.824	43.122	36.465	47.498	55.990	200.900

NA: No aplica

(a)	A				C				A				C				B			
(b)	s^1	t_1^1	t_2^1	u^1	s^2	t_1^2	t_2^2	u^2	s^3	t_1^3	t_2^3	u^3	s^4	t_1^4	t_2^4	u^4	s^5	t_1^5	t_2^5	u^5
(c)	0,3	1,0	3,3	0	0,5	0,9	3,4	0,4	0,5	2,0	6,7	0	0,5	1,0	3,7	0	0,8	1,6	3,6	0,0
(d)	0,3	1,3	4,6	4,6	5,0	5,9	9,3	9,7	10,2	12,2	18,8	18,8	19,3	20,3	24,0	24,0	24,8	26,4	30,0	30,0

(a) Secuencia óptima
(b) Variables según posición k en la secuencia
(c) Duración (días)
(d) Duración acumulada (días)

Inmediatamente después del *setup* se inicia la producción del lote 1(producto A) por t_1^1 horas, no hay tiempo disponible (u^1 = 0) en el intervalo de tiempo de 1 a 1,3 días. Durante este período se produce para recuperar la escasez de inventario del lote 3 (producto A)del ciclo anterior hasta que se completa la demanda pendiente (nivel de inventario igual a cero unidades). El programa comienza surtiendo demanda pendiente, para luego continuar la producción por t_2^1 horas generando inventario durante 3,3 días hasta el tiempo 4,6 días, en este momento se genera el máximo de inventario disponible (I_{max}) del lote 1(producto A), correspondiente a 17824 unidades, las que se consumen durante (t_2 + t_3) = 7,6 días. En esta corrida de producción se genera una máxima escasez de inventario de 10.940 unidades en el tiempo 10,2 días, las que serán surtidas por el lote 3(producto A).

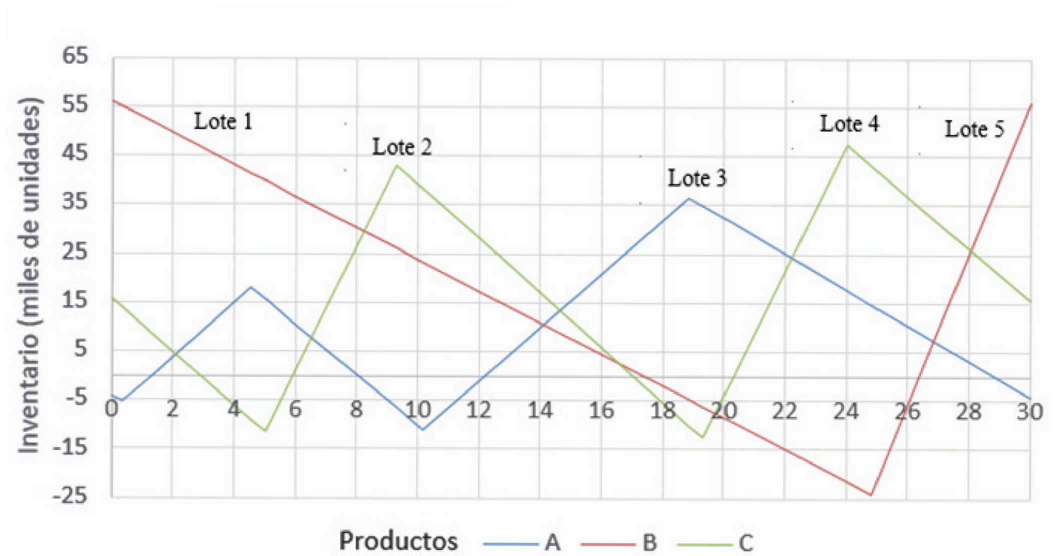

Figura3. Niveles de inventario y escasez (solución de Wagner y Davis)

La descripción de eventos para el resto de lotes es análoga a la señalada anteriormente. Los resultados muestran que el modelo de optimización no lineal generó una adecuada sincronización de las corridas de producción evitando la interferencia ya que no hay traslapos de períodos de producción y de preparación entre lotes (Figura3 y 4). Los niveles de servicio que resultan de este programa son de 77%, 70% y 79% para los productos A, B y C, respectivamente.

La figura 4 muestra la carta Gantt para el programa de producción, en ésta las partes achuradas representan tiempos de *setup*, mientras que las partes sólidas representan los tiempos de producción, más claro para los tiempos de recuperación de atrasos y más oscuro para los tiempos de generación de inventario.

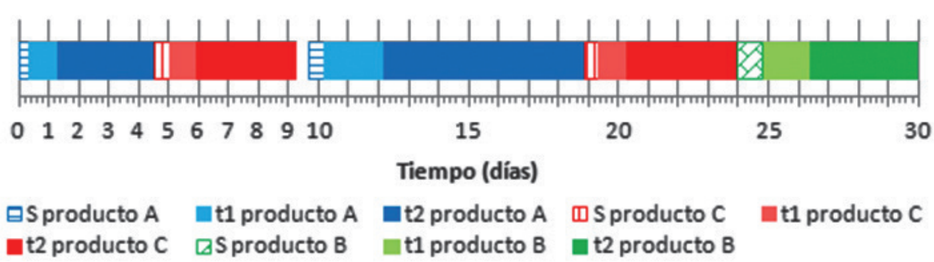

Figura 4. Carta Gantt, solución de Wagner y Davis (2002)

Si al problema se le agrega la restricción de nivel de servicio de un 95% (*R = 0,95*)para todo producto, manteniendo la frecuencia y secuencia de lotes a producir, el costo total promedio del programa aumenta a 402659 $/día. Para cumplir con el servicio, el modelo no lineal resuelve aumentar los tiempos de producción que generan inventario (t_2), en consecuencia, aumentan las cantidades máximas de inventario disponible (I_{max}) y los periodos de tiempo con inventario (t_2 + t_3). El efecto de elevar en forma significativa el nivel de servicio para todos los productos se observa en que las unidades máximas de faltante de inventario (escasez) se reducen significativamente, lo que aumenta los costos de mantención de inventario. La diferencia de costo entre ambos programas representa el costo de mejorar el nivel servicio. Por otra parte, la restricción del nivel de servicio no afecta el tamaño de los lotes (*Q*), esto significa que la solución se obtiene trasladando hacia arriba las curvas del gráfico de la figura 3.Si consideramos el problema original sin escasez, esto es, con un nivel de servicio de un 100% (*R = 1*), el costo del programa sería de 442553 $/día.

Al resolver el problema con un solo lote por producto (sin restricción de nivel de servicio), esto es, utilizando el enfoque del *ciclo común*, el costo total promedio del programa resulta 475958 $/día, y constituye el *límite superior* del costo óptimo del programa de producción del problema tratado en este trabajo. Es decir, todos los programas que consideraron más de tres lotes tuvieron un costo total promedio inferior a este valor.

CONCLUSIONES

La utilización de la heurística con secuencias de lotes son evaluadas mediante un modelo de optimización no lineal desarrollado por los autores como extensión de un modelo de la literatura que incorpora la satisfacción de demanda atrasada (*backlogging*) y el cumplimiento de niveles de servicio.

El modelo de optimización no lineal permite flexibilizar la producción de múltiples productos mediante lotes considerando la escasez de inventario como alternativa válida cuando el mercado lo permite.

El análisis económico del impacto del nivel de servicio al cliente respecto de los costos de producción, constituye una herramienta de apoyo a la toma de decisiones estratégicas de un sistema productivo para determinar el nivel óptimo de servicio.

La calidad de la solución del problema completo depende principalmente de la calidad del procedimiento de búsqueda de las frecuencias de producción y de su secuenciación.Las ventajas del procedimiento propuesto, es que permite elegir entre un conjunto de soluciones factibles (incluyendo eventualmente, pero no garantizando, la secuencia y asignación de lotes óptima), y su simplicidad en comparación a métodos de solución basados en modelos de *relajación lagrangeana*.

RECOMENDACIONES

Si bien, el objetivo del presente trabajo es más bien un tratamiento teórico de un problema de grandes implicancias prácticas, trabajos futuros contemplan la implementación computacional del método para el análisis de problemas de gran tamaño y la comparación con los resultados de otros métodos. Un problema de la heurística de Wagner y Davis es que su procedimiento de generación de secuencias puede generar secuencias ya evaluadas previamente. Para atenuar este problema, sin duda que trabajos futuros debiesen explotar el uso de meta heurísticas integrando la resolución del modelo no lineal con la generación conjunta de las frecuencias y secuencias de lotes a procesar.

En un ambiente productivo poco estable por interrupciones no programadas debido a fallas en la máquina o demanda más bien incierta, podría ser más práctico considerar un programa de producción de un costo levemente superior a otro, pero con un menor número de lotes

REFERENCIAS

BALLOU, R. *Logística – Administración de la cadena de suministro*. Pearson – Prentice Hall, México, 2004.

BOMBERGER, E. A Dynamic Programming Approach to a Lot Scheduling Problem. *Management Science*, 1966,vol. 12, no. 11, p. 778 – 784.

BRANDER, P. *Inventory Control and Scheduling Problems in a Single-Machine Multi-Item System*. Tesis de Doctorado.Suecia: Lulea University of Technology, 2005.

DELPORTE, C., and THOMAS, L. Lot sizing and sequencing for N products on one facility, *Management Science*, 1978, vol. 23, no. 10, p. 1070 – 1079.

DOBSON, G. The economic lot-scheduling problem: Achieving feasibility using time-varying lot sizes.*Operations Research*, 1987,vol. 35, no 5, p. 764 – 771.

DOBSON, G. The cyclic lot scheduling problem with sequence-dependent setups. *Operations Research*, 1992, vol. 40, no. 4, p. 736 – 749.

ELMAGHRABY, S. The Economic Lot Scheduling Problem (ELSP): Review and Extension. *Management Science*, 1978, vol. 24, no 6, p. 587 – 598.

GALLEGO, G. and ROUNDY, R. The Economic Lot Scheduling Problem with Finite Backorder Costs. *Naval Research Logistics*, 1992, vol. 39, no.5, p. 729 – 739.

GUPTA, D. On the economic lot scheduling problem with backlogging: The common cycle approach. *Operations Research Letters*, 1992, vol. 12, no. 2, p. 101 – 109.

HANSMANN, F. *Operations Research in Production and Inventory*. John Wiley & Sons, 1962.

HUANG, J.Y., and YAO, M.J. On the optimal lot-sizing and scheduling problem in serial-type supply chainsystem using a time-varying lot-sizing. *International Journal of Production Research*, 2013, vol. 51, no. 3,p. 735 – 750.

JORDAN, C. *Batching and Scheduling – Models and Methods for Several Problem Classes*. Springer, 1996.

OH, H.CH., and KARIMI, I.A. Planning production on a single processor with sequence-depend setup part 1: determination of campaigns. *Computers and Chemical Engineering*, 2001, vol. 25, no. 7 – 8, p. 1021 – 1030.

KHOUJA, M., MICHALEWICZ, Z., and WILMOT, M. The use of genetic algorithm to solve the economic lot size scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, 1998, vol. 110, no. 3, p. 509- 524.

MALLYA, R. Multi-product scheduling on a single machine: a case study. *Omega*, 1992, vol. 20, no. 4, p. 529 – 534.

MAXWELL, W. The scheduling of economic lot size. *Naval Research Logistics Quarterly*, 1964, vol. 11, no. 2,p. 89 – 124.

MOON, E., SILVER, A., and CHOI, S. Hybrid genetic algorithm for the economic lot-scheduling problem. *International Journal of Production Research*, 2002, vol. 40, no. 4, p. 809 – 824.

RAZA, A., AKGUNDUZ, A., and CHEN, M. A tabu search algorithm for solving economic lot scheduling problem. *Journal of Heuristics*, 2006, vol. 12, no. 6, p. 413 – 426.

RAZA, A., and AKGUNDUZ, A.A comparative study of heuristic algorithm on Economic Lot Scheduling Problem. *Computers & Industrial Engineering*, 2008, vol. 55, no. 1, p. 94 – 109.

SHIRODKAR, V., PILLAI, V., and SRIDHARAN, R. On the feasibility of sequence-dependent economic lot scheduling problem. *International Journal of Production Research*, 2011, vol. 49, no. 10,p. 2925 – 2939.

WAGNER, B., and DAVIS, D. A search heuristic for the sequence-dependent economic lot scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, 2002, vol. 141, no. 1, p. 133 – 146.

ANEXO

La figura 5 muestra la geometría del ELSP (por simplicidad se ha omitido el *setup*), para un lote con tasa de demanda y de producción d y p respectivamente. Durante el tiempo de producción (t_p) el inventario crece a la tasa de producción menos la tasa de demanda $(p-d)$, y durante el tiempo en que no se produce (t_d) el inventario decrece a la tasa de demanda d.

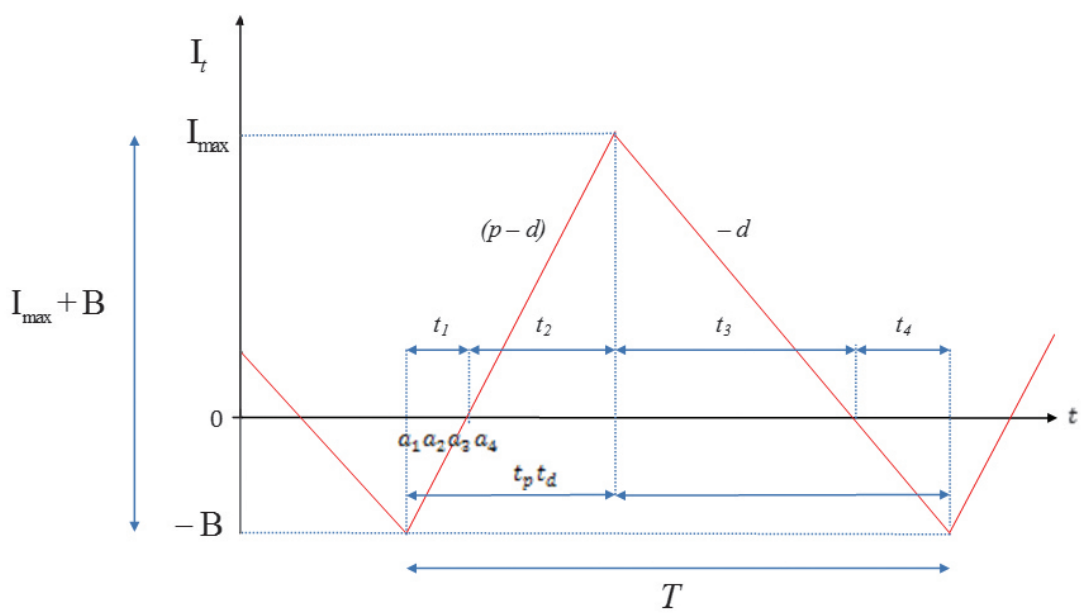

Figura 5. Geometría para el ELSP (sin *setup*) con escasez – Un producto

El costo de inventario se define proporcional al inventario medio, I_m en el ciclo T :

$$I_m = \frac{1}{T}\int_{a_2}^{a_3} I(t)dt = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{2}I_{max}(t_2+t_3)\right]$$

Notar que $I_{max} = (p-d)t_2 = d \cdot t_3$, de donde $t_3 = \frac{(p-d)}{d}t_2 = \left(\frac{p}{d}-1\right)t_2$, por lo que:

Análogamente, el costo de escasez se define proporcional a la escasez media, B_m, en el ciclo T :

$$B_m = \frac{1}{T}\left[\int_{a_1}^{a_2} -I(t)dt + \int_{a_3}^{a_4} -I(t)dt\right] = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{2}B(t_1+t_4)\right]$$

Notar que $B_m = (p-d)t_1 = d \cdot t_4$, de donde $t_4 = \frac{(p-d)}{d}t_1 = \left(\frac{p}{d}-1\right)t_1$, por lo que:

$$B_m = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{2}(p-d)\left(\frac{p}{d}\right)(t_1)^2\right]$$

Sea h y π, los costos de inventario y de escasez respectivamente. Así, el costo de inventario medio por unidad de tiempo resulta:

$$C_{Inv} = \frac{1}{T}h \cdot I_m + \frac{1}{T}\pi \cdot B_m = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{2}(p-d)\left(\frac{p}{d}\right)(t_2)^2\right]h + \frac{1}{T}\left[\frac{1}{2}(p-d)\left(\frac{p}{d}\right)(t_1)^2\right]\pi$$

La tasa de servicio, definida como la fracción de tiempo en que el producto se encuentra disponible en inventario, debe ser mayor o igual al nivel de servicio R deseado, esto es:

$$\frac{(t_2+t_3)}{T} \geq R$$

Notarque $T = (t_1 + t_2 + t_3 + t_4)$, ydelodesarrolladomásarriba $t_3 = \left(\frac{p}{d}-1\right)t_2$ y $t_4 = \left(\frac{p}{d}-1\right)t_1$ y Así, reemplazando en la desigualdad anterior se obtiene la relación:

$$\frac{t_2}{(t_1+t_2)} \geq R\ .$$