Theoria, Vol. 19 (2): 9-19, 2010 ISSN 0717-196X

Revisión / Revision

COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS LINEALES: DESDE 1885 A 2010

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF LINEAR DIFFERENCE EQUATIONS: SINCE 1885 TO 2010

Samuel de Jesús Castillo Apolonio

Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias. Universidad del Bío-Bío. Concepción. Chile
Dirección para correspondencia: Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias. Universidad del Bío-Bío.
Avenida Collao 1202. Concepción. Teléfono (41) 2731148, Fax: (56-41) 2731018, scastill@ubiobio.cl

RESUMEN

Se presenta una revisión de los resultados más relevantes, para el autor, que han sido motivados por un resultado obtenido por el famoso matemático H. Poincaré en 1885. Se presentan trabajos posteriores a 1997. Esta publicación fue hecha de tal manera que pueda ser entendida por personas que tengan nociones básicas de cálculo. Los preliminares proporcionan los elementos para que el lector pueda entender los resultados sin grandes dificultades.

Palabras clave: Fórmulas asintóticas, ecuaciones en diferencias, transformada Z, convergencia de sucesiones.

ABSTRACT

A review of the most relevant results, according to the author, is, hereby, presented. These results have been motivated by the work done by the famous mathematician H. Poincaré in 1885. Works after 1997 are presented. This paper was done in such a way that it can be understood by readers who have only basic notions of Calculus. The preliminaries provide elements to the reader to understand the results without great difficulties.

Keywords: Asymptotic formulas, difference equations, Z transformed, convergence of sequences.

Recibido: 03.11.10. Revisado: 17.11.10. Aceptado: 22.12.10.

INTRODUCCIÓN

La idea central de esta publicación es introducir al lector, que haya cursado asignaturas de cálculo diferencial e integral, en las ecuaciones en diferencia. En términos simples, una ecuación en diferencia es aquella donde la incógnita es una sucesión. No es el objetivo presentar ni desarrollar un resultado original.

El lector familiarizado con cálculo en variable compleja, en lo que se refiere a sucesiones, límite de sucesiones, continuidad, derivación, series, series de potencias, derivación de series de potencias y Teorema del punto fijo de Banach no debería tener problemas para entender los temas que serán tratados aquí. Más aún si el lector domina estos temas, sólo en variable real y tiene conocimiento básico de números complejos, podría extender lo que ya sabe a variable compleja y en vez de intervalos considerar discos en el plano complejo.

El concepto de punto de adherencia, que será definido en los preliminares, no es muy usado en los textos de cálculo para ingeniería y es probable que en algunos casos sea necesario verlo con más detenimiento para familiarizarse con él. Podría ser necesario un poco de álgebra lineal para entender qué significa independencia lineal, mencionada en uno de los teoremas al final.

La introducción de la transformada Z permite presentar algunos ejemplos dados para mostrar cómo algunas fórmulas, que en los primeros cursos han de comprobarse por el Principio de Inducción Matemática, pueden ser deducidas directamente.

Un texto recomendado para quien quiera familiarizarse con el cálculo en variable compleja y la noción topológica de punto de adherencia, es Conway (1978). Para familiarizarse con los temas básicos de ecuaciones en diferencia, se recomienda Elaydi (2005).

Este artículo está dividido en dos secciones adicionales a la introducción: Preliminares, donde se verán algunos cálculos típicos que pueden hacerse con las ecuaciones en diferencia, pero presentados de manera deductiva. También está la sección de resultados a destacar, donde se comienza con una observación natural de las ecuaciones en diferencias que se relaciona con un resultado que se remonta al año 1885 y su impacto matemático hasta la actualidad.

PRELIMINARES

Esta sección tiene como objetivo, presentar algunos preliminares básicos de manera simple, pero sin perder la formalidad que las definiciones necesitan. Algunas de las definiciones dadas no están descritas como fueron dadas originalmente, sino que reemplazadas por equivalencias más simples.

Se denotará por $(x_n)_{n=0}^{+\infty}$ a la sucesión compleja, que puede entenderse como una función que asigna a cada entero no negativo n, un número complejo x_n. Se dirá que la sucesión compleja $(x_n)_{n=0}^{+\infty}$ converge a un número complejo x_∞ si dado un número positivo ε, tan pequeño como se quiera, existe un entero no negativo N_ε tan grande como sea necesario tal que $|x_n - x_\infty| \leq \varepsilon$, para todo entero positivo $n \geq N_\varepsilon$. La convergencia de la sucesión compleja $n \geq N_\varepsilon$. a x_∞ se denotará por $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_\infty$.

Un número complejo p se llamará punto de adherencia de un conjunto de números complejos A si existe una sucesión $(p_n)_{n=0}^{+\infty}$ tal que $p_n \in A$ para todo entero no negativo n y $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} p$. Se denotará por $\overline{A}$ el conjunto de todos los puntos de adherencia de A.

Sea f una función cuyo dominio D y recorrido son conjuntos de números complejos. Sea $q_\infty \in \overline{D}$. Se denotará $f(q) \xrightarrow[q\to q_\infty]{} L$ cuando dado un número positivo ε, tan pequeño como se quiera, exista un número positivo δ, tan pequeño como sea necesario, tal que $|f(q) - L| \leq \varepsilon$ para todo $q \in D$ tal que $|q - q_\infty| \leq \delta$. Si $q_\infty \in D$ y

$f(q) \xrightarrow[q \to q_\infty]{} f(q_\infty)$, se dirá que f es continua en q_∞. Sólo se dirá que f es continua, cuando sea continua en todo elemento de su dominio.

Nótese que si f es continua y $(q_n)_{n=0}^{+\infty}$ tal que $q_n \in D$ para todo entero no negativo n y existe $q_\infty \in D$ tal que $q_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} q_\infty$ entonces $f(q_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(q_\infty)$. Si $(q_n)_{n=0}^{+\infty}$ hubiese estado definida recursivamente como $q_{n+1} = f(q_n)$, entonces $q_\infty = f(q_\infty)$. En este caso se dice que q_∞ es un punto fijo para f.

La idea de punto fijo permite calcular algunas relaciones recurrentes. Por ejemplo, la fracción continua $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}$ que puede escribirse recursivamente como $x_{n+1} = \dfrac{1}{1+x_n}$.

Si se parte de la base que $(x_n)_{n=0}^{+\infty}$ converge a un número real x_∞ entonces $x_\infty^2 + x_\infty - 1 = 0$. En tal caso, los posibles valores para x_∞ serían $x_\infty = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Dado que los valores de x_∞ no pueden ser negativos, el único resultado posible es $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Queda para el lector probar la convergencia de la sucesión.

Se dirá que un conjunto F de números complejos es cerrado si dada una sucesión $(z_n)_{n=0}^{+\infty}$ tal que $z_n \in F$ para todo entero no negativo n y existe un número complejo z_∞ de modo que $z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} z_\infty$, se tiene que $z_\infty \in F$.

A partir del Teorema del Punto Fijo de Banach, pueden hacerse las siguientes afirmaciones. Sea F un conjunto cerrado de números complejos y sea f una función con dominio y recorrido iguales a F. Suponer que f es contractiva, es decir, que existe $\theta \in \left]0,1\right[$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq \theta |x-y|$, para todo $x, y \in F$. Entonces, la sucesión $(x_n)_{n=0}^{+\infty}$ definida recursivamente por $x_{n+1} = f(x_n)$, con x_0 arbitrario, converge a un valor $x_\infty \in F$ independiente de cuánto valga x_0 y $x_\infty = f(x_\infty)$. Además, si $x_A \in F$ es otro punto fijo para f, es decir, $x_A = f(x_A)$ entonces $x_\infty = x_A$.

También, la rapidez de convergencia es exponencial. Este hecho, se ve en la demostración del Teorema del Punto Fijo de Banach cuando se hace la estimación $|x_\infty - x_n| \leq \dfrac{\theta^n}{1-\theta} |x_1 - x_0|$ para todo entero no negativo n.

Un ejemplo es considerar la función $f:[0,1]\to[0,1]$, definida por $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2}(1+x)}$. Puede probarse que esta función es contractiva y $f(1)=1$. Si $(x_n)_{n=0}^{+\infty}$ es una sucesión con términos x_0 y x_1 definidos arbitrariamente y $x_{n+1}=f(x_n)$ para $n\geq 2$ donde $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Entonces, x_n corresponde a la longitud de la apotema de un polígono de 2^n lados, inscrito en una circunferencia de radio 1. En este caso, por el Teorema del Punto Fijo de Banach y por razones geométricas, no es difícil ver que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Por otro lado, la longitud del lado del polígono mencionado viene dada por $2\sqrt{1-x_n^2}$ y por tanto el perímetro del polígono viene dado por $P_n=2^{n+1}\sqrt{1-x_n^2}$. Geométricamente, puede observarse que $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\pi$ es el perímetro de la circunferencia de radio 1. Por lo tanto la sucesión $(x_n 2^{n+1}\sqrt{1-x_n^2})_{n=0}^{+\infty}$ converge "bastante rápido" al número π.

Dada una sucesión de números complejos de sumas parciales de números complejos $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ se denotará por $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ al número real al cual converge la sucesión $\left(\sum_{n=0}^{N}a_n\right)_{N=0}^{+\infty}$ en caso de existir. $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ se llamará serie de los a_n. Si la sucesión converge se dirá que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ converge, en caso contrario se dirá que la serie diverge. Puede ser probado que $\sum_{n=0}^{+\infty}a^n=\frac{1}{1-a}$ si a es un número complejo tal que $|a|<1$. Se supondrá también que si la serie $S(u)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n u^n$ converge para los números complejos u tales que $|u|<R$, para R adecuadamente pequeño y $\frac{S(u+\Delta u)-S(u)}{\Delta u} \xrightarrow[\Delta u\to 0]{} \frac{dS}{du}$, entonces $\frac{dS}{du}=\sum_{n=0}^{+\infty}na_n u^{n-1}$ y puede probarse que tal serie es convergente para todo número complejo u tal que $|u|<R$.

Dada la sucesión compleja $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ se define la Transformada Z de $(x_n)_{n=0}^{+\infty}$ por $Z[x_n]=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x_n}{z^n}$, para todo z número complejo de módulo mayor que un número real positivo R suficientemente grande de modo que $Z[x_n]$ converja.

Nótese que $Z[x_n]$ es una función inyectiva. Nótese que dado un número complejo a, $Z[a^n]=\frac{1}{1-a\frac{1}{z}}=\frac{z}{z-a}$. Haciendo el cambio de variable $u=\frac{1}{z}$ se tiene que $\frac{d^r}{du^r}Z[a^n]=\sum_{n=0}^{n} n^{(r)}a^n u^{n-r}=z^r Z[n^{(r)}a^n]$, donde $n^{(r)}=\prod_{j=0}^{r-1}(n-j)$. Por otro lado, puede demostrarse que $\frac{d^r}{du^r}Z[a^n]=\frac{d^r}{du^r}\left(\frac{1}{1-au}\right)=\frac{r!a^r}{(1-au)^{r+1}}=\frac{z^{r+1}r!a^r}{(z-a)^{r+1}}$ $Z[n^{(r)}a^n]=\frac{zr!a^r}{(z-a)^{r+1}}$. También $\frac{1}{z}Z[x_{n+j}]=z^j\frac{1}{z}Z[x_n]-\sum_{l=0}^{j-1}z^{j-l-1}x_k$.

Esto resulta ser útil para resolver ecuaciones en diferencias lineales homogéneas de orden k: $a_k x_{n+k}+a_{k-1}x_{n+k-1}+\cdots+a_1x_{n+1}+a_0x_n=0$. Al aplicar transformada Z a esta ecuación, se obtiene $P(z)\frac{1}{z}Z[x_n]=Q(z)$, donde $P(z)=a_kz^k+\cdots+a_1z+a_0$ es el polinomio característico de la ecuación en diferencias lineal homogénea planteada y $Q(z)$ es un polinomio de grado menor que k y que depende de los valores iniciales $x_0,x_1,\ldots,x_{k-1}$.

Entonces, $\frac{1}{z}Z[x_n]=\frac{Q(z)}{P(z)}$. Por el Teorema Fundamental del Álgebra, todo polinomio en el conjunto de los números complejos, puede escribirse como el producto de potencias de polinomios de grado 1, en particular, $P(z)=a_k(z-\lambda_1)^{n_1}\cdots(z-\lambda_m)^{n_m}$, donde $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ son las distintas raíces de $P(z)$ y $n_1,\ldots,n_m$ son las respectivas multiplicidades de tales raíces.

Descomponiendo $\frac{Q(z)}{P(z)}$ en fracciones parciales, se obtiene $\frac{1}{z}Z[x_n]=\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n_m}\frac{\alpha_{jl}}{(l-1)!\lambda_j^{l-1}}f_{jl}(z)$, donde $f_{jl}(z)=\frac{(l-1)!\lambda_j^{l-1}}{(z-\lambda_j)^l}=\frac{1}{z}Z[n^{(l-1)}\lambda_j^n]$. Luego, la solución general de

$$a_kx_{n+k}+a_{k-1}x_{n+k-1}+\cdots+a_1x_{n+1}+a_0x_n=0$$

puede escribirse como $x_n=\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n_m}\beta_{jl}n^{(l-1)}\lambda_j^n$, donde $\beta_{jl}=\frac{\alpha_{jl}}{(l-1)!\lambda_j^{l-1}}$.

Un ejemplo al que se puede aplicar

la reciente fórmula es la sucesión de Fibonacci. Esta sucesión viene dada por $(0,1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots)$ y se puede escribir como la ecuación en diferencias $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ para $n \geq 2$ con $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$. La ecuación característica de esta ecuación en diferencias es $z^2 = z + 1$, cuyas raíces son $z = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Luego, existen constantes A y B tales que $x_n = A\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Usando $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$ se obtiene $A = -B = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. De aquí, $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

Se define la convolución entre dos sucesiones $(x_n)_{n=0}^{+\infty}$ y $(y_n)_{n=0}^{+\infty}$ como $x_n * y_n = \sum_{s=0}^{n} x_{n-s} y_s$. Entonces $Z[x_n * y_n] = Z[x_n]Z[y_n]$. Esto resulta ser útil para resolver ecuaciones en diferencias lineales no homogéneas de orden k: $a_k x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = h_n$.

Si $P(z) = a_k z^k + \cdots + a_1 z + a_0 = a_k (z-\lambda_1)^{n_1} \cdots (z-\lambda_m)^{n_m}$, donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ son las distintas raíces de $P(z)$ y $n_1, \ldots, n_m$ son las respectivas multiplicidades de tales raíces, entonces

$$Z[x_n] = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n_m} \beta_{jl} Z[n^{(l-1)}\lambda_j^n] + \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n_m} \gamma_{jl} Z[n^{(l-1)}\lambda_j^n] Z[h_n]$$

donde $\dfrac{1}{P(z)} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n_m} \dfrac{(l-1)!\lambda_j^{l-1}}{(z-\lambda_j)^l} \gamma_{jl}$.

Luego,

$$x_n = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n_m} \beta_{jl} n^{(l-1)} \lambda_j^n + \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n_m} \gamma_{jl} \sum_{s=0}^{n} (n-s)^{(l-1)} \lambda_j^{n-s} h_s.$$

Un ejemplo donde se puede aplicar esta fórmula es en la deducción de una expresión que permita sumar $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ sin tener que hacer una larga suma en caso que n sea un valor grande. Considerar la ecuación en diferencias $x_{n+1} = x_n + n^2$, con $x_0 = 0$. Entonces, para $n \geq 1$ se tiene $x_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2$. Por otro lado, $Z[x_{n+1}] = Z[x_n] + Z[n] + Z[n(n-1)]$. Entonces, $(z-1)Z[x_n] = Z[n] + Z[n(n-1)]$. De aquí, $Z[x_n] = \dfrac{Z[n]}{z-1} + \dfrac{Z[n(n-1)]}{z-1}$, es decir, $Z[x_n] = \dfrac{z}{(z-1)^3} + \dfrac{2z}{(z-1)^4}$. Por tanto, $x_n = \dfrac{1}{2}n(n-1) + \dfrac{1}{3}n(n-1)(n-2)$, es decir, $x_n = \dfrac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$. Así,

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Un ejemplo típico es la fórmula que permite calcular el interés compuesto cuando se ha pedido un préstamo de M unidades monetarias con una tasa de interés i a ser pagado en N meses. Si D_n representa la cantidad adeudada en el n-ésimo mes entonces $D_0 = M$ y $D_N = 0$. Si C es el monto fijo que se ha de pagar mensualmente por el préstamo, se obtiene la ecuación en diferencias $D_{n+1} = (1+i)D_n - C$. Aplicando transformada Z se obtiene $(z-(1+i))Z[D_n] = zM - CZ[1]$. De aquí $Z[D_n] = M\frac{z}{z-(1+i)} - \frac{C}{i}\left(\frac{z}{z-(1+i)} - \frac{z}{z-1}\right)$, es decir

$$Z[D_n] = MZ[(1+i)^n] - \frac{C}{i}\left(Z[(1+i)^n] - Z[1]\right).$$

Luego, $D_n = \left(M - \frac{C}{i}\right)(1+i)^n + \frac{C}{i}$. Como $D_N = 0$, $C = \frac{Mi}{1-(1+i)^{-N}}$. Con sólo ver la ecuación $D_{n+1} = (1+i)D_n - p_n$ puede notarse cómo se va aumentando una deuda cuando los pagos p_n son menores que la cuota que se ha de pagar para extinguir la deuda en N meses, aún si no se cobraran intereses por mora. Se deja al lector ver este ejercicio.

RESULTADOS A DESTACAR

Nótese que si $(x_n)_{n=0}^{+\infty}$ es una solución de la ecuación en diferencia lineal homogénea de orden k:

$$a_k x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0$$

tal que $x_n \neq 0$ para n suficientemente grande entonces $\frac{x_{n+1}}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$, donde $z = \lambda$ es raíz del polinomio $P(z) = a_k z^k + \cdots + a_1 z + a_0$. Claramente, por cada raíz $z = \lambda'$ del polinomio $P(z)$ hay una solución x_n de la ecuación en diferencias tal que $\frac{x_{n+1}}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda'$.

Considerar la ecuación diferencial lineal homogénea pero con una perturbación $\left(a_k + b_k(n)\right) y_{n+k} + \left(a_{k-1} + b_{k-1}(n)\right) y_{n+k-1} + \cdots + \left(a_1 + b_1(n)\right) y_{n+1} + \left(a_0 + b_0(n)\right) y_n = 0,$

donde $b_j(n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ para $j=0,\ldots,k$. Si $a_kz^k+\cdots+a_1z+a_0=a_k(z-\lambda_1)^{n_1}\cdots(z-\lambda_m)^{n_m}$, con $n_1=n_2=\cdots=n_m=1$, entonces $m=k$. Poincaré (1885) probó que si $n_1=n_2=\cdots=n_m=1$ y $|\lambda_j|\neq|\lambda_l|$ si $j\neq l$, entonces una solución $(y_n)_{n=0}^{+\infty}$ de la ecuación en diferencias recientemente considerada $y_n=0$ para n suficientemente grande o existe λ_{j_0} tal que $\frac{y_{n+1}}{y_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\lambda_{j_0}$. Pituk (2002) observa que Poincaré deja sin responder la pregunta: dada una λ_{j_0} raíz cualquiera, ¿existe una solución $(y_n)_{n=0}^{+\infty}$ de la ecuación en diferencias considerada tal que $\frac{y_{n+1}}{y_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\lambda_{j_0}$? El mismo Pituk responde de manera afirmativa a esa pregunta citando un resultado dado por O. Perron en 1909. Más precisamente, se establece que si $a_j+b_j(n)\neq0$ para $j=0,\ldots,k$ entonces la ecuación considerada tiene k soluciones linealmente independientes $y_{1,n},y_{2,n},\ldots,y_{k,n}$ tales que $\frac{y_{j,n+1}}{y_{j,n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\lambda_j$ para $j=1,\ldots,k$.

Nótese que las fórmulas asintóticas obtenidas para $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ no proveen una fórmula asintótica para $(y_n)_{n=0}^{+\infty}$. De aquí en adelante, se mostrarán resultados que satisfacen esta necesidad.

Coffman (1964) obtiene uno de estos resultados asintóticos para $(y_n)_{n=0}^{+\infty}$ pidiendo la condición que las raíces $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ sean no nulas y tengan módulos distintos y que $\sum_{n=0}^{+\infty}|b_j(n)|$ sea convergente para que, dado $j_0\in\{1,2,\ldots,k\}$ la ecuación en recurrencias tenga una solución y_n tal que $\frac{y_n}{\lambda_{j_0}^n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$.

Pituk (1997) muestra que si se pide que $|\lambda_j|<|\lambda_1|$ para $j\neq1$, $\sum_{n=0}^{+\infty}|b_j(n+1)-b_j(n)|$ y $\sum_{n=0}^{+\infty}|b_j(n)|^2$ convergen, entonces para $n\geq n_0$ con n_0 suficientemente grande, existe una solución y_n de la ecuación considerada que satisface la fórmula asintótica $\frac{y_n}{\lambda_1^{n-n_0}E_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$, donde $E_n=\prod_{l=n_0}^{n-1}\left(1+\frac{1}{P'(\lambda_1)}\sum_{j=0}^{k-1}\lambda_1^{-(j+1)}b_{k-1-j}(l)\right)$ y

$P'(z) = ka_k z^{k-1} + (k-1)a_{k-1}z^{k-2} + \cdots + a_1$. Claramente, la fórmula asintótica implica la relación encontrada por Poincaré $\frac{y_{n+1}}{y_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda_1$, con restricciones mayores sobre la ecuación en diferencias pero con mayor información sobre la "rapidez" de convergencia.

Castillo y Pinto (1997) logran, como caso particular de algo más general, la misma fórmula asintótica pidiendo las condiciones menos restrictivas $|\lambda_j| \neq |\lambda_1|$ para $j \neq 1$ y evitando la convergencia de $\sum_{n=0}^{+\infty} |b_j(n+1) - b_j(n)|$. Cabe destacar que este resultado fue planteado en un contexto mucho más general: ecuaciones matriciales donde la ecuación lineal no perturbada tiene una matriz diagonal con valores propios variables.

Castillo y Pinto (2002) obtienen un resultado asintótico para el caso en que $|\lambda_j| \neq |\lambda_1|$ para $j \neq 1$, $b_j(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ y $\sum_{n=0}^{+\infty} |b_j(n+1) - b_j(n)|$ converge. Tales hipótesis implican que para $n \geq n_0$ con n_0 suficientemente grande, existe una solución $(y_n)_{n=0}^{+\infty}$ de la ecuación considerada que satisface la fórmula asintótica $\frac{y_n}{\lambda_1^{n-n_0}\Omega_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, donde $\Omega_n = \prod_{l=0}^{n-1}\left(1 + \frac{\varepsilon_l}{\lambda_1}\right)$ y $(\varepsilon_n)_{n=0}^{+\infty}$ es una sucesión tal que $w_n = \lambda_1 + \varepsilon_n$ es una raíz del polinomio $Q_n(w) = \left(a_k + b_k(n)\right)w^k + \left(a_{k-1} + b_{k-1}(n)\right)w^{k-1} + \cdots + \left(a_1 + b_1(n)\right)w + \left(a_0 + b_0(n)\right)$ tal que $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Castillo (2003) y Castillo y Pinto (2010) obtuvieron resultados asintóticos, unificando las ecuaciones en diferencia y las ecuaciones diferenciales en un solo tipo de ecuaciones llamadas Ecuaciones Dinámicas en "time scale".

De Castillo y Pinto (2010) se cita el siguiente resultado.

TEOREMA. Considerar la ecuación en diferencias

$$y_{n+1} - y_n = b_n y_{n-k}$$

donde $(b_n)_{n=0}^{+\infty}$ es una sucesión de números reales que satisface

$$\sup_{n \geq n_0} \sum_{\varsigma=n-k}^{n-1} |b(\varsigma)| < 1$$

para n_0 suficientemente grande. Entonces cada solución $(y_n)_{n=0}^{+\infty}$ de la ecuación en diferencias planteada tiene la fórmula asintótica

$$\frac{y_n}{\Xi_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} cte.$$

donde

$$\Xi_n = \prod_{\zeta=n_0}^{n-1} \left(1 + \left(\sum_{l=j-k}^{\zeta-1} b_l \right) + \sum_{j=1}^{+\infty} \Delta_j(\zeta) \right),$$

$$\Delta_j(n) = b_n \left(\prod_{\zeta=n-k}^{n} \frac{1}{1+\mu_j(\zeta)} - \prod_{\zeta=n-k}^{n} \frac{1}{1+\mu_{j-1}(\zeta)} \right)$$

$\mu_j(n) = b_n \prod_{\zeta=n-k}^{n} \frac{1}{1+\mu_{j-1}(\zeta)}$, para todo

$n \geq jk$, $\mu_j(n) = 0$ si $n < jk$ y

$\mu_0 = 0$. Puede elegirse $(y_n)_{n=0}^{+\infty}$ tal que

$$\frac{y_n}{\Xi_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$

Este resultado es uno de los últimos. Está incluido el caso en que $b_j(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ como en el teorema original de Poincaré.

Este resultado está presentado de manera compacta por lo "abultado" de las fórmulas.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece el apoyo económico del proyecto DIUBB 110908 2/R.

BIBLIOGRAFÍA

CASTILLO, S. and PINTO, M. A. (1997) Asymptotic formulae for solutions of delay-difference systems. Advances in Difference Equations (Veszprém, Hungary 1995). Amsterdam: Gordon and Breach, pp 107-117.

CASTILLO, S. and PINTO, M. A. (2001) Asymptotic formulae for nonlinear functional difference equations. Computers and Math with applications Appl. 42: 551-559.

CASTILLO, S. (2003) Asymptotic formula for dynamic equations in time scale with a functional perturbation. *Functional Differential Equations* 10:107-120.

CASTILLO, S. and PINTO, M. A. (2010) Asymptotic behavior of functional dynamic equations in time scale. Dynamic Systems and Applications 19:165-177.

COFFMAN, C. V.(1964) Asymptotic behavior of solutions of ordinary difference equations. Transactions of American Mathematical Society 110: 22-51.

CONWAY, J. B. (1978) Functions of a Complex Variable. P. R. Halmos, F. W. Ghering, C.C. Moore ed(s). New York: Springer Verlag Inc.

ELAYDI, S. (2005) An Introduction to Difference Equations. S. Axler, F.W. Gehring, K.A. Ribet ed(s). New York: Undergraduate Texts in Mathematics. Springer.

PITUK, M. (1997) Asymptotic behavior of a Poincaré recurrence system. *Journal of Approximation Theory* 91: 226-243.

PITUK, M. (2002) More on Poincaré's and Perron's theorems for difference equations. J. Difference Equ. Appl. 8: 201-216.

POINCARÉ H. (1885), Sur les équations linéares aux differentielles et aux differences finies, *American Journal Math.* 7: 203-258.